

517/071

М 34

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Майкопский государственный технологический университет»

Инженерный факультет

Кафедра математики, физики и системного анализа

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**Методические рекомендации
по изучению онлайн-курса**

Майкоп - 2023

УДК 517(07)
ББК 22.161
М 34

Печатается по решению кафедры
математики, физики и системного анализа ФГБОУ ВО «МГТУ»

Составители:

Дёмина Татьяна Ивановна – заведующая кафедрой математики, физики и системного анализа ФГБОУ ВО «МГТУ», кандидат физико-математических наук, доцент

Шевякова Ольга Петровна – доцент кафедры математики, физики и системного анализа ФГБОУ ВО «МГТУ», кандидат физико-математических наук, доцент

Чуяко Елена Борисовна – доцент кафедры математики, физики и системного анализа ФГБОУ ВО «МГТУ», кандидат педагогических наук, доцент

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. Методические рекомендации по изучению онлайн-курса. – Майкоп: Изд-во «ИП Кучеренко В.О.», 2023. - 58 с.

Методические рекомендации раскрывают порядок изучения раздела «Математический анализ» с применением онлайн курса.

Рекомендации направлены на оказание помощи преподавателям при организации процесса обучения, а также будут полезны обучающимся для подготовки и прохождения контроля освоения указанного раздела дисциплины «Математика».

© ФГБОУ ВО «МГТУ», 2023
© Дёмина Т.И., Шевякова О.П.,
составление, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

1.	Цели и задачи освоения курса	4
2.	Требования к результатам освоения курса.....	5
3.	Структура курса и расписание.....	6
	3.1. Содержание модулей курса.....	7
	3.2. Распределение модулей по учебным неделям.....	13
4.	Обеспечение и ресурсы для прохождения курса.....	14
	4.1. Мультимедийные материалы.....	14
	4.2. Электронно-библиотечные системы.....	14
	4.3. Список литературы для самостоятельного изучения курса.....	14
5.	Контрольно-измерительные материалы по курсу.....	14
	Модуль I. Дифференциальное исчисление функций од- ной переменной	17
	Модуль II. Дифференциальное исчисление функций не- скольких переменных	25
	Модуль III. Интегральное исчисление	31
	Модуль IV. Обыкновенные дифференциальные уравне- ния	39
	Итоговый тест.....	45
6.	Задачи для самостоятельной работы.....	51

1. Цели и задачи освоения курса

Цель курса: дать студентам основные понятия математического, используемые для описания и моделирования, различных по своей природе управленческих, технических и экономических задач; привить студентам навыки использования математических методов в практической деятельности.

Задачей курса является развития навыков решения задач по математическому анализу.

Курсу «Математический анализ» предшествует общематематическая подготовка в объёме средней общеобразовательной школы или колледжа.

Для успешного освоения онлайн курса обучающие должны:

знать: основные понятия и методы элементарной математики, геометрии, алгебры и начал математического анализа;

уметь: производить действия с числами; использовать основные алгебраические тождества для преобразования алгебраических выражений; выполнять геометрические построения; доказывать математические утверждения;

владеть: приемами вычислений на калькуляторе инженерного типа; навыками использования математических справочников.

Рекомендуемые направления подготовки:

04.03.01 Химия,
08.03.01 Строительство,
09.03.03 Прикладная информатика,
10.03.01 Информационная безопасность,
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника,
15.03.02 Технологические машины и оборудование,
18.03.01 Химическая технология,
19.03.02 Продукты питания из растительного сырья,
19.03.04 Технология продукции и организации общественного питания,
20.03.01 Техносферная безопасность,
20.05.01 Пожарная безопасность,
21.03.01 Нефтегазовое дело,
21.03.02 Землеустройство и кадастры,
23.03.01 Технология транспортных процессов,
23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов,
27.03.01 Стандартизация и метрология,
27.03.05 Инноватика,
29.03.01 Технология изделий легкой промышленности,
31.05.01 Лечебное дело,
31.05.02 Педиатрия,
31.05.03 Стоматология,
33.05.01 Фармация,
35.03.01 Лесное дело,
35.03.04 Агрономия,

35.03.06 Агроинженерия,
 35.03.07 Технология производства и переработки сельскохозяйственной
 продукции,
 35.03.10 Ландшафтная архитектура,
 36.03.02 Зоотехния,
 38.03.01 Экономика,
 38.03.02 Менеджмент,
 38.03.04 Государственное и муниципальное управление,
 38.03.07 Товароведение,
 38.05.02 Таможенное дело.

В результате изучения курса «Математический анализ» слушатели должны:

знать:

- содержание утверждений и следствий из них, используемых для обоснования выбираемых методов математического анализа;
- основные приемы решения математических задач;

уметь:

- применять полученные знания по дисциплине при анализе способов решения поставленных задач;
- применять инструментарий математического анализа при решении поставленных задач;

владеть:

- способностью производить самостоятельный выбор методов и способов решения;
- навыками решения основных математических задач;
- навыками сбора и обработки необходимых данных для математической постановки и решения задач;
- навыками анализа и интерпретации результатов решения задач.

2. Требования к результатам освоения курса

Структура курса предусматривает поэтапное формирование следующих результатов обучения (далее – РО).

Индекс	Формулировка	Уровень
РО-1	Способность использовать имеющиеся знания в процессе усвоения нового материала (узнавание ранее изученных объектов, свойств)	Базовый Знать: основные понятия и методы элементарной математики, геометрии, алгебры и начал математического анализа; уметь: производить действия с числами; использовать основные алгебраические тождества для преобразования алгебраических выражений; выполнять геометрические построения; доказывать математические утверждения;

		владеть: приемами вычислений на калькуляторе инженерного типа; навыками использования математических справочников.
РО-2	Способность использовать новые полученные знания при решении задач (выполнение деятельности по образцу, инструкции или под руководством)	Базовый Знать: основные математические понятия, их свойства и применение; уметь: решать типовые математические задачи разными способами; владеть: основными методами и приемами вычислений при решении задач.
РО-3	Способность критического мышления; применения методов анализа способов решения для выбора оптимального (планирование и самостоятельное выполнение деятельности, решение прикладных задач)	Базовый Знать: математические понятия, теоремы и их применение, методы решения прикладных задач; уметь: анализировать поставленную задачу, выбирать оптимальное решение, анализировать результат, формулировать прикладные задачи и решать их; владеть: способами доказательств утверждений и теорем; методами и приемами вычислений при решении задач

3. Структура курса и расписание

Объём/ рабочее время курса: 36 часов (1 з.е.)/6 недель.

Форма обучения: онлайн-курс для всех форм обучения.

Курс состоит из модулей – разделов.

В состав курса входят видео-лекции, теоретический материал, задачи для самостоятельного решения. По каждому модулю курса предусмотрены промежуточные тестирования и итоговое тестирование по окончании всего курса.

№ п/п	Наименование модуля	Количество часов
I.	Дифференциальное исчисление функций одной переменной	13
II.	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	6
III.	Интегральное исчисление	8
IV.	Обыкновенные дифференциальные уравнения	8
	Итоговая аттестация (тест)	1
	Итого	36

3.1. Содержание модулей курса

Мо- дуль	Цель	Наимено- вание раз- дела	Краткое описание модуля	Видеоро- лик
I.	Изучение понятия числовой последовательности. Освоение навыков нахождения пределов числовых последовательностей.	1. Числовые последовательности.	1.1. Основные понятия. 1.2. Бесконечно-малые и бесконечно-большие последовательности. 1.3. Предел числовой последовательности.	1. Предел числовой последовательности.
	Актуализация понятия функции и ее характеристик. Изучение и освоение методов нахождения пределов функций.	2. Функции одной переменной. Предел функции.	2.1. Понятие функции. Способы задания функции. 2.2. Основные характеристики функции. 2.3. Понятие обратной функции и сложной функции. 2.4. Предел функции в точке и на бесконечности. 2.5. Замечательные пределы. 2.6. Раскрытие неопределенностей различных типов.	2. Замечательные пределы. 3. Раскрытие неопределенностей различных типов.
	Изучение понятия непрерывности функции. Освоение навыков исследования функции на непрерывность.	3. Непрерывность функции.	3.1. Непрерывность функции в точке. 3.2. Основные теоремы о непрерывных функциях. 3.3. Свойства функций, непрерывных на отрезке. 3.4. Классификация точек разрыва функции.	4. Классификация точек разрыва функции.

	<p>Актуализация знаний о дифференцировании функций. Получение навыков дифференцирования неявно или параметрически заданных функций; навыков логарифмического дифференцирования.</p>	<p>4. Производная функции одной переменной.</p>	<p>4.1. Определение производной. Основные правила дифференцирования. 4.2. Производная сложной функции. 4.3. Производная обратной функции. 4.4. Таблица производных. 4.5. Производные высших порядков. 4.6. Логарифмическое дифференцирование. 4.7. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически. 4.8. Дифференциал функции.</p>	<p>5. Логарифмическое дифференцирование. 6. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически.</p>
	<p>Актуализация знаний о применении производной при нахождении интервалов монотонности и экстремумов функции, наибольшего и наименьшего значения функции непрерывной на отрезке. Получение навыков применения правила Лопиталя при нахождении пределов</p>	<p>5. Исследование функции при помощи производной.</p>	<p>5.1. Основные теоремы дифференциального исчисления. 5.2. Правило Лопиталя. 5.3. Условия монотонности функции. 5.4. Экстремум функции. 5.5. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке. 5.6. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. 5.7. Асимптоты графика функции. 5.8. Общая схема исследования функции и построения её графика.</p>	<p>7. Общая схема исследования функции и построения её графика.</p>

	функций; исследования графика функции на выпуклость; проведения исследования функции и построения ее графика.			
II.	Обобщение понятия функции: функции нескольких переменных. Получение навыков нахождения пределов функций нескольких переменных и исследования функций нескольких переменных на непрерывность.	6. Функции нескольких переменных.	6.1. Основные понятия. 6.2. Предел и непрерывность функции двух переменных. 6.3. Непрерывность функции двух переменных на множестве.	8. Предел и непрерывность функции двух переменных.
	Обобщение понятия производной функции: частные производные функции нескольких переменных, производная по направлению. Получение навыков нахождения	7. Дифференцируемость функций нескольких переменных.	7.1. Частные производные. 7.2. Дифференцируемость и полный дифференциал функции двух переменных. 7.3. Производная сложной функции. 7.4. Дифференцирование неявной функции. 7.5. Производная по направлению и градиент.	9. Частные производные. 10. Производная по направлению и градиент.

	частных производных функции нескольких переменных.			
	Изучение понятия экстремума функции двух переменных. Изучение и освоение методики нахождения экстремума и наибольшего (наименьшего) значения функции двух переменных.	8. Приложения частных производных функций двух переменных.	8.1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. 8.2. Экстремум функции двух переменных. 8.3. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции в замкнутой области. 8.4. Условный экстремум.	11. Экстремум функции двух переменных. 12. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции в замкнутой области.
III.	Актуализация понятий первообразной функции и неопределенного интеграла. Освоение методов интегрирования. Получение навыков интегрирования рациональных и тригонометрических функций.	9. Неопределенный интеграл.	9.1. Первообразная и неопределенный интеграл. 9.2. Свойства неопределенного интеграла. 9.3. Таблица основных неопределенных интегралов. 9.4. Основные методы интегрирования. 9.5. Интегрирование рациональных функций. 9.6. Интегрирование тригонометрических функций.	13. Интегрирование рациональных функций.
	Актуализация понятия определенного интеграла.	10. Определенный интеграл.	10.1. Понятие определенного интеграла. 10.2. Основные свойства определенного интеграла.	14. Замена переменной и интегрирование по частям в

	Получение навыков вычисления определенных интегралов; применения интегралов в геометрии. Изучение понятия несобственного интеграла.		10.3. Оценки интегралов. Формула среднего значения. 10.4. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. 10.5. Формула Ньютона-Лейбница. 10.6. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. 10.7. Геометрические приложения определенного интеграла. 10.8. Несобственные интегралы.	определенном интеграле.
IV.	Изучение понятия дифференциального уравнения. Получение навыков нахождения решения уравнений с разделёнными и разделяющимися переменными, однородных уравнений и уравнений в полных дифференциалах.	11. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка	11.1. Дифференциальные уравнения (основные понятия). 11.2. Дифференциальные уравнения с разделёнными переменными. 11.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. 11.4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. 11.5. Уравнение в полных дифференциалах.	15. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
	Получение навыков решения линейных дифференциальных уравнений первого по-	12. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.	12.1. Метод Лагранжа. 12.2. Метод Бернулли. 12.3. Уравнение Бернулли.	16. Метод Бернулли.

	рядка и уравнений Бернулли.			
	Изучение понятия дифференциального уравнения высших порядков. Освоение навыков нахождения решений дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.	13. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.	13.1. Дифференциальные уравнения высших порядков (основные понятия). 13.2. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.	17. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
	Изучение понятия линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Освоение навыков нахождения решения линейного однородного и неоднородного (с правой частью специального вида) уравнения с постоянными коэффициентами.	14. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.	14.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. 14.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. 14.3. Метод вариации произвольных постоянных.	18. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
		Итоговый контроль		

3.2. Распределение модулей по учебным неделям

Мо- дуль	Наименование раздела	Коли- чество часов	Компонент	Неделя
I.	1. Числовые последовательно- сти.	2	Промежуточный тест по модулю	1 неделя
	2. Функции одной перемен- ной. Предел функции.	2		2 неделя
	3. Непрерывность функции.	2		
	4. Производная функции од- ной переменной.	3		
	5. Исследование функции при помощи производной.	4		
II.	6. Функции нескольких пере- менных.	2	Промежуточный тест по модулю	3 неделя
	7. Дифференцируемость функций нескольких перемен- ных.	2		
	8. Приложения частных про- изводных функций двух пере- менных.	2		
III.	9. Неопределенный интеграл.	4	Промежуточный тест по модулю	4 неделя
	10. Определенный интеграл.	4		
IV.	11. Обыкновенные дифферен- циальные уравнения первого порядка	2	Промежуточный тест по модулю	5 неделя
	12. Линейные дифференци- альные уравнения первого по- рядка.	2		
	13. Дифференциальные урав- нения, допускающие пониже- ние порядка.	2		
	14. Линейные уравнения с по- стоянными коэффициентами.	2		6 неделя
	Итоговый контроль	1	Итоговый тест	

4. Обеспечение и ресурсы для прохождения курса

4.1. Мультимедийные материалы

1. Современная цифровая образовательная среда в РФ (СЦОС): Режим доступа: <https://online.edu.ru/>
2. Онлайн курс «Математический анализ»: Режим доступа: <https://www.lektorium.tv/matematiceskij-analiz>

4.2. Электронно-библиотечные системы

1. IPRBooks. Базовая коллекция: электронно-библиотечная система: сайт / Общество с ограниченной ответственностью Компания «Ай Пи Ар Медиа». – Саратов, 2010. – URL: <http://www.iprbookshop.ru/586.html> - Режим доступа: для зарегистрир. пользователей.
2. Znanium.com. Базовая коллекция: электронно-библиотечная система: сайт / ООО «Научно-издательский центр Инфра-М». – Москва, 2011 - URL: <http://znanium.com/catalog> . - Режим доступа: для зарегистрир. пользователей.

4.3. Список литературы для самостоятельного изучения курса

1. Дёмина, Т.И. Математический анализ для экономистов. Практикум: учебное пособие / Т.И. Дёмина, О.П. Шевякова. – М.: ИНФРА-М, 2016. – 365 с.
2. Красс, М.С. Математика для экономического бакалавриата: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - М.: ИНФРА-М, 2020. - 472 с.
3. Курс высшей математики. Ч. 1: учебник / М.К. Беданок и др. – Майкоп: Магарин О.Г., 2013. – 384 с.
4. Курс высшей математики. Ч. 2: учебник / М.К. Беданок и др. – Майкоп: Магарин О.Г., 2013. – 279 с.
5. Шипачев, В.С. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. – М.: ИНФРА-М, 2019. - 479 с.
6. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие / В.С. Шипачев. - М.: ИНФРА-М, 2020 - 304 с.

5. Контрольно-измерительные материалы по курсу

Контрольно-измерительный блок по курсу «Математический анализ» включает:

- контрольно-измерительные материалы (тесты) к каждому модулю;
- контрольно-измерительные материалы (тесты) для прохождения итогового экзамена

Контрольно-измерительные материалы к модулям обеспечивают контроль знаний по окончанию изучения модуля, включая лекционный материал, задачи для самостоятельного решения и дополнительную литературу.

Комбинация всех заданий обеспечивает проверку всех планируемых результатов обучения. Выбор формы задания соответствует виду оцениваемого результата обучения.

Количество заданий тестового типа в рамках текущего контроля каждого модуля: 5-8 заданий на каждый блок материала с трудоемкостью выполнения 20 минут.

Количество заданий тестового типа для итогового экзамена: 10 заданий. Время выполнения 60 минут.

Применяется 100-бальная система оценивания

Описание системы оценивания

Наименование оцениваемого мероприятия	Максимальный балл	Коэффициент весомости	Проходной балл
Промежуточный тест к модулю I.	100	0,15	60
Промежуточный тест к модулю II.	100	0,15	60
Промежуточный тест к модулю III.	100	0,15	60
Промежуточный тест к модулю IV.	100	0,15	60
Итоговый экзаменационный тест	100	0,40	60
Итоговая оценка	100	1	60

Шкала соответствия системы оценивания

Диапазоны шкалы оценивания (100-бальная шкала)	Оценка прописью
90-100	Отлично
75-89	Хорошо
60-74	Удовлетворительно
0-59	Неудовлетворительно

Каждому обучающему предоставляется две попытки прохождения промежуточного теста по каждому модулю и две попытки прохождения итогового экзаменационного тестирования.

Слушатели, которые набрали не менее 60%, получают сертификат о прохождении курса. Сертификат о прохождении курса можно скачать в соответствующем разделе личного кабинета.

После того, как курс пройден, он останется в личном кабинете обучающегося на сайте Лекториума. Слушатели могут обращаться к видео и дополнительным материалам курса в любое время. Оцениваемые тесты после окончания обучения могут быть закрыты.

Модуль I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

- Темы модуля.**
1. Числовые последовательности.
 2. Функции одной переменной. Предел функции.
 3. Непрерывность функции.
 4. Производная функции одной переменной.
 5. Исследование функции при помощи производной.

СПЕЦИФИКАЦИЯ ЗАДАНИЙ

Номер задания	Тема	Педагогическая цель	Форма (тип)	Трудность	Расчетное время, мин.
Тест по модулю I					
1	1	Знание	Multiple choice	1	1
2	2	Понимание	Multiple choice	2	2
3	2	Понимание	Multiple choice	4	3
4	3	Знание	Multiple choice	1	1
5	2	Понимание	Multiple choice	3	3
6	4	Понимание	Multiple choice	4	4
7	5	Понимание	Multiple choice	3	4
8	5	Понимание	Multiple choice	2	2

Время выполнения теста – 20 минут

Тест 1

1. Если для любого номера n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$, то последовательность $\{x_n\}$ называется ...
 - 1) ограниченной
 - 2) возрастающей
 - 3) постоянной
 - 4) невозрастающей
2. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x^3}$ равно ...

- 1) 1
- 2) 0
- 3) ∞
- 4) 2

3. Область определения функции $f(x) = \frac{\ln(9-2x)}{x^2 + 2x - 3}$...

- 1) $(-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; 4,5)$
- 2) $(-\infty; -3) \cup (-3; 1)$
- 3) $(-\infty; 4,5)$
- 4) $(-3; 1) \cup (1; 4,5)$

4. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $y = f(x)$, если функция в точке x_0 ...

- 1) является непрерывной
- 2) является ограниченной
- 3) не является непрерывной
- 4) имеет конечный предел

5. Угловым коэффициентом касательной, проведенной к графику функции $y = \cos 4x + 3x$ в точке $x = 0$, равен ...

- 1) 3
- 2) 2
- 3) 1
- 4) 5

6. Производная функции $y = (x^3 - 4)^{\sin x}$ равна ...

- 1) $(x^3 - 4)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x^3 - 4) + \frac{3x^2 \sin x}{x^3 - 4} \right)$
- 2) $(x^3 - 4)^{\sin x} \left(\sin x \cdot \ln(x^3 - 4) + \frac{3x^2 \cos x}{x^3 - 4} \right)$
- 3) $(x^3 - 4)^{\cos x} \left(\cos x \cdot \ln(x^3 - 4) + \frac{3x^2 \sin x}{x^3 - 4} \right)$
- 4) $(x^3 - 4)^{\cos x} \left(\sin x \cdot \ln(x^3 - 4) + \frac{3x^2 \cos x}{x^3 - 4} \right)$

7. Наибольшее значение функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$ на отрезке $[0; 5]$ равно ...

- 1) 25
- 2) 100
- 3) 2
- 4) 163

8. Вертикальной асимптотой графика функции $y = \frac{x+2}{(x^2+9) \cdot (\sqrt[5]{x}-1)}$ является

прямая ...

- 1) $x = -3$
- 2) $x = 1$

- 3) $x = -1$
- 4) $x = -2$

Тест 2

1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, то последовательность $\{x_n\}$ является ...
 - 1) расходящейся
 - 2) возрастающей
 - 3) сходящейся
 - 4) ограниченной
2. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x}$ равно ...
 - 1) 1
 - 2) 0
 - 3) ∞
 - 4) -2
3. На числовой прямой дана точка $x = 6,2$. Тогда её ε – окрестностью может являться интервал ...
 - 1) $(6,2; 6,6)$
 - 2) $(6,1; 6,5)$
 - 3) $(5,9; 6,5)$
 - 4) $(6,0; 6,3)$
4. Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы функции и они не равны, то точка x_0 называется ...
 - 1) точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$
 - 2) точкой конечного разрыва
 - 3) точкой непрерывности функции $y = f(x)$
 - 4) точкой устранимого разрыва функции $y = f(x)$
5. Производная третьего порядка функции $y = \sin(3x - 2)$ равна ...
 - 1) $3 \cos(3x - 2)$
 - 2) $-9 \sin(3x - 2)$
 - 3) $81 \sin(3x - 2)$
 - 4) $-27 \cos(3x - 2)$
6. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t) = 7 + 5t^2$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t . Тогда скорость точки при $t = 1$ равна...
 - 1) 12
 - 2) 17
 - 3) 10

4) 5

7. Наименьшее значение функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{2}{3}$ на отрезке $[-1; 1]$

равно ...

1) 0

2) -2

3) $-\frac{2}{3}$

4) $-\frac{4}{3}$

8. Наклонной асимптотой графика функции $y(x) = \frac{2x^2 + x + 4}{x - 1}$ является пря-

мая...

1) $y = 2x + 3$

2) $y = -2x + 3$

3) $y = -x + 2$

4) график не имеет наклонных асимптот

Тест 3

1. Если для любого номера n выполняется неравенство $x_{n+1} \geq x_n$, то последовательность $\{x_n\}$ называется ...

1) неубывающей

2) постоянной

3) невозрастающей

4) бесконечно большой

2. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(-x)}{\sqrt[3]{x}}$ равно ...

1) 1

2) 0

3) ∞

4) 2

3. Найти область определения функции $y = \frac{4}{x^2 - 9}$.

1) $x \in (-3; 3)$

2) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$

3) $x \in (-\infty; +\infty)$

4) $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$

4. Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $y = f(x)$, если в точке x_0 ...

1) функция не имеет предела

- 2) хотя бы один из односторонних пределов конечен
 3) хотя бы один из односторонних пределов бесконечен
 4) существуют конечные односторонние пределы функции
5. Угловый коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 4x - x^2$ в точке $x = -1$, равен ...
 1) 6
 2) 2
 3) 1
 4) 5
6. Значение производной второго порядка функции $y = \sin 2x + 4x$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$ равно ...
 1) -1
 2) 1
 3) 4
 4) -4
7. Наибольшее значение функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{2}{3}$ на отрезке $[-1; 1]$ равно...
 1) 0
 2) $-\frac{4}{3}$
 3) $-\frac{2}{3}$
 4) -2
8. Наклонной асимптотой графика функции $y(x) = \frac{2x^2 + x + 4}{x - 1}$ является прямая...
 1) $y = -x + 2$
 2) $y = -2x + 3$
 3) $y = 2x + 3$
 4) график не имеет наклонных асимптот

Тест 4

1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, то последовательность $\{x_n\}$ является ...
 1) ограниченной
 2) возрастающей
 3) сходящейся
 4) расходящейся

2. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 6x + 4}$ равно ...

- 1) -8
- 2) ∞
- 3) 0
- 4) 2

3. Найти область определения функции $y = \frac{5}{\sqrt{9 - x^2}} + 4$.

- 1) $x \in (-\infty; +\infty)$
- 2) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$
- 3) $x \in (-3; 3)$
- 4) $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$

4. Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$, если в точке x_0 ...

- 1) существуют конечные односторонние пределы функции
- 2) функция не имеет предела
- 3) хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности
- 4) хотя бы один из односторонних пределов конечен

5. Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \cos 3x + 2x$ в точке $x = 0$, равен ...

- 1) 3
- 2) 2
- 3) 1
- 4) 5

6. Выражение $\frac{2x}{1+x^4}$ является производной функции ...

- 1) $y = \operatorname{arctg} x^2$
- 2) $y = 2 \operatorname{arctg} x$
- 3) $y = \frac{3}{x^2}$
- 4) $y = \arcsin 2x$

7. Наименьшее значение функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$ на отрезке $[0; 5]$ равно ...

- 1) 163
- 2) 3
- 3) 8
- 4) 2

8. Наклонной асимптотой графика функции $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$ является прямая

- 1) $y = x + 2$
- 2) $y = x - 2$
- 3) $y = -x + 1$
- 4) $y = -2x + 1$

Тест 5

1. Если существует положительное число M такое, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $|x_n| \leq M$, то последовательность $\{x_n\}$ называется...

- 1) неограниченной
- 2) возрастающей
- 3) ограниченной
- 4) неубывающей

2. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 5}$ равно ...

- 1) 0
- 2) ∞
- 3) -8
- 4) 2

3. Найти область определения функции $y = \frac{6}{x^2 + 9} - 2$.

- 1) $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$
- 2) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$
- 3) $x \in (-3; 3)$
- 4) $x \in (-\infty; +\infty)$

4. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция $f(x)$...

- 1) не может быть непрерывной в точке x_0
- 2) может быть непрерывной в этой точке x_0
- 3) имеет разрыв в этой точке x_0
- 4) непрерывна в этой точке x_0

5. Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \cos 3x + 2x$ в точке $x = \frac{\pi}{6}$, равен

- 1) -3
- 2) 2
- 3) -1
- 4) 1

6. Производной функции $y = (\ln x - 1)^2$ является ...

- 1) $2(\ln x - 1)$

2) $\frac{2(\ln x - 1)}{x}$

3) $\frac{\ln x}{2} - 1$

4) $(\ln x - 1)^3$

7. Наибольшее значение функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$ на отрезке $[0; 2]$ равно ...

1) 10

2) 8

3) 3

4) 12

8. Вертикальной асимптотой графика функции $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$ является прямая...

1) $x = 0$

2) $x = 2$

3) $x = -2$

4) $x = 1$

Модуль II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

- Темы модуля.**
6. Функции нескольких переменных.
 7. Дифференцируемость функций нескольких переменных.
 8. Приложения частных производных функций двух переменных.

СПЕЦИФИКАЦИЯ ЗАДАНИЙ

Номер задания	Тема	Педагогическая цель	Форма (тип)	Трудность	Расчетное время, мин.
Тест по модулю II					
1	6	Знание	Multiple choice	1	2
2	6	Знание	Multiple choice	1	2
3	7	Понимание	Цифровой ввод	3	4
4	7	Понимание	Multiple choice	2	3
5	8	Понимание	Multiple choice	4	5
6	8	Понимание	Multiple choice	3	4

Время выполнения теста – 20 минут

Тест 1

1. Точка M_0 называется внутренней точкой множества D ...
 - 1) если у этой точки существует окрестность, которая принадлежит D
 - 2) если у этой точки не существует окрестность, которая принадлежит D
 - 3) если существует окрестность, точки которой как принадлежат множеству D , так и не принадлежат ему
 - 4) если окрестность этой точки не содержит точек множества D
2. Предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется ...
 - 1) условным экстремумом функции $z = f(x, y)$
 - 2) градиентом функции $z = f(x, y)$
 - 3) частным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ по переменной x
 - 4) частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x

3. Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{(x+2y)^2 - 9}{\sin(x+2y-3)}$.
4. Частная производная функции $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ по переменной x равна...
- 1) $z'_x = 2x - 2y + 2$
 - 2) $z'_x = 2x - 2y - 1$
 - 3) $z'_x = -2x + 2y + 2$
 - 4) $z'_x = -2x + 2y - 1$
5. Найти градиент функции $z = \ln \sqrt{5x^2 - y^2}$ в точке $A(1, 1)$.
- 1) $\text{grad } z = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j}$
 - 2) $\text{grad } z = \frac{1}{4}\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j}$
 - 3) $\text{grad } z = \frac{5}{4}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j}$
 - 4) $\text{grad } z = \frac{5}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}$
6. Точкой экстремума функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2$ является точка...
- 1) $M(-1, -1)$
 - 2) $M(2, -1)$
 - 3) $M(1, -1)$
 - 4) $M(1, -2)$

Тест 2

1. Точка M_0 называется внешней точкой множества D ...
- 1) если у этой точки существует окрестность, которая принадлежит D
 - 2) если у этой точки существует окрестность, которая не принадлежит D
 - 3) если существует окрестность, точки которой как принадлежат множеству D , так и не принадлежат ему
 - 4) если окрестность этой точки не содержит точек множества D
2. Предел $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ называется ...
- 1) частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной y
 - 2) условным экстремумом функции $z = f(x, y)$
 - 3) градиентом функции $z = f(x, y)$
 - 4) частным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ по переменной y
3. Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{x^2 - y^2}{\text{tg}(x+y)}$.

4. Частная производная функции $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ по переменной y равна...
- 1) $z'_y = 2x - 2y + 2$
 - 2) $z'_y = 2x - 2y - 1$
 - 3) $z'_y = -2x + 2y + 2$
 - 4) $z'_y = -2x + 2y - 1$
5. Найти производную функции $z = \ln \sqrt{5x^2 - y^2}$ в точке $A(1, 1)$ по направлению вектора $\vec{a}(2, -1)$.
- 1) $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{11}{2\sqrt{5}}$
 - 2) $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{11}{3\sqrt{5}}$
 - 3) $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = -\frac{11\sqrt{5}}{20}$
 - 4) $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{11\sqrt{5}}{20}$
6. Точкой экстремума функции $z = x^2 - y^2 + 2xy + 6x - 10y + 1$ является точка...
- 1) $M(-4, 1)$
 - 2) $M(1, -4)$
 - 3) $M(1, 4)$
 - 4) $M(1, -2)$

Тест 3

1. Функция $f(M)$ - бесконечно малая при $M \rightarrow M_0$, если ...
- 1) $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = 1$
 - 2) $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = 0$
 - 3) $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$
 - 4) $f(M_0) = 0$
2. Полный дифференциал функции двух переменных равен ...
- 1) сумме произведений частных производных функции на дифференциалы соответствующих независимых переменных
 - 2) произведению частных производных функции
 - 3) произведению частной производной функции на дифференциал независимой переменной
 - 4) отношению частных производных функции

3. Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{x^4 - y^4}{\operatorname{arctg}(x^2 - y^2)}$.
4. Частная производная функции $z = x^2 + 3xy + y^2 - 2$ по переменной x равна...
- 1) $z'_x = 2x - 2y - 2$
 - 2) $z'_x = 2x - 3y - 1$
 - 3) $z'_x = 2x + 3y$
 - 4) $z'_x = -2x + 3y$
5. Найти градиент функции $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$ в точке $A(8; 2)$.
- 1) $\operatorname{grad} z = -\frac{1}{8}\vec{i} + \vec{j}$
 - 2) $\operatorname{grad} z = \frac{1}{8}\vec{i} + \vec{j}$
 - 3) $\operatorname{grad} z = -\frac{1}{8}\vec{i} - \frac{1}{8}\vec{j}$
 - 4) $\operatorname{grad} z = \frac{1}{8}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$
6. Найти стационарную точку функции $z = x^2 - y^2 + 2xy + 6x - 10y + 1$.
- 1) $M(-4, 1)$
 - 2) $M(1, 4)$
 - 3) $M(1, -4)$
 - 4) $M(1, -2)$

Тест 4

1. Разность $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ называется ...
- 1) частным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ по переменной x
 - 2) частным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ по переменной y
 - 3) частным приращением функции $z = f(x, y)$ по переменной x
 - 4) частным приращением функции $z = f(x, y)$ по переменной y
2. Градиентом функции в точке называется ...
- 1) вектор, координаты которого являются значениями соответствующих частных производных функции в точке
 - 2) приращение функции в точке
 - 3) отношение частных производных функции
 - 4) сумма частных производных функции в точке

3. Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^3 - y^3}{x - y}$

4. Частная производная функции $z = x^2 + 3xy + y^2 - 2$ по переменной y равна...

1) $z'_y = 3x - 2y$

2) $z'_y = 3x + 2y$

3) $z'_y = 2x + 3y - 2$

4) $z'_y = -2x + 3y - 2$

5. Найти производную функции $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$ в точке $A(8; 2)$ по направлению вектора $\vec{a}(-2, 1)$.

1) $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

2) $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$

3) $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{\sqrt{5}}{7}$

4) $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = -\frac{3\sqrt{5}}{4}$

6. Найти стационарную точку функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2$.

1) $M(-1, -1)$

2) $M(2, -1)$

3) $M(1, -1)$

4) $M(1, -2)$

Тест 5

1. Разность $f(x_0, y_0 + \Delta x) - f(x_0, y_0)$ называется ...

1) частным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ по переменной x

2) частным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ по переменной y

3) частным приращением функции $z = f(x, y)$ по переменной x

4) частным приращением функции $z = f(x, y)$ по переменной y

2. Как называется предел $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta_{\vec{s}} u}{\Delta s} \dots$

1) производной функции u по направлению вектора $\vec{s}$

2) частной производной функции u по переменной s

3) градиентом функции u

4) полным дифференциалом функции u

3. Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{(3x + y)^2 - 4}{\arcsin(3x + y - 2)}$.
4. Частная производная функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ по переменной y равна...
- 1) $z'_y = -\frac{2y}{x^2 + y^2}$
 - 2) $z'_y = \frac{2x}{x^2 + y^2}$
 - 3) $z'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$
 - 4) $z'_y = 2x + 2y$
5. Найти градиент функции $z = \operatorname{arctg}(xy)$ в точке $A(1; 1)$.
- 1) $\operatorname{grad} z = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$
 - 2) $\operatorname{grad} z = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$
 - 3) $\operatorname{grad} z = -\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$
 - 4) $\operatorname{grad} z = \frac{1}{2}\vec{i} - \vec{j}$
6. Найти стационарную точку функции $z = -5x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 4$.
- 1) $M(0, -1)$
 - 2) $M(2, -1)$
 - 3) $M(1, -1)$
 - 4) $M(1, -2)$

Модуль III. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

- Темы модуля.** 9. Неопределенный интеграл.
10. Определенный интеграл.

СПЕЦИФИКАЦИЯ ЗАДАНИЙ

Номер задания	Тема	Педагогическая цель	Форма (тип)	Трудность	Расчетное время, мин.
Тест по модулю III					
1	9	Знание	Multiple choice	1	2
2	9	Понимание	Multiple choice	1	2
3	9	Понимание	Multiple choice	3	3
4	9	Понимание	Multiple choice	4	4
5	9	Понимание	Multiple choice	4	3
6	10	Знание	Multiple choice	2	2
7	10	Применение	Цифровой ввод	4	4

Время выполнения теста – 20 минут

Тест 1

- Неопределенный интеграл функции – это ...
 - совокупность функций
 - числовой интервал
 - уравнение
 - число
- Множество первообразных функции $y = e^{-3x+5}$...
 - $e^{-3x+5} + C$
 - $\frac{1}{3}e^{-3x+5} + C$
 - $-\frac{1}{3}e^{-3x+5} + C$
 - $-3e^{-3x+5} + C$
- Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$?

- 1) $\frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + C$
- 2) $\operatorname{tg} 3x + C$
- 3) $-\operatorname{ctg} 3x + C$
- 4) $-\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x + C$

4. Найти интеграл $\int x^2 \cdot 4^{x^3} dx$.

- 1) $\frac{4^{x^3}}{3} + C$
- 2) $\frac{4^{x^3}}{3 \ln 4} + C$
- 3) $\frac{4^{x^3} \ln 4}{3} + C$
- 4) $\frac{4^{x^3}}{\ln 4} + C$

5. Правильную рациональную дробь $\frac{x+2}{(x+1)x^2}$ можно представить в виде

суммы простейших дробей ...

- 1) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2}$
- 2) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$
- 3) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^2}$
- 4) $\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2}$

6. Формула $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ называется формулой ...

- 1) Коши-Буняковского
- 2) Больцано-Коши
- 3) Ньютона-Лейбница
- 4) Бойля-Мариотта

7. Вычислить определённый интеграл $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^2} \right) dx$.

Тест 2

1. Если выполняется равенство $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется ...

- 1) оригиналом функции

- 2) исходной функцией
- 3) характеристической функцией
- 4) первообразной функции

2. Множество первообразных функции $y = e^{7-5x} \dots$

- 1) $e^{7-5x} + C$
- 2) $-\frac{1}{5}e^{7-5x} + C$
- 3) $-5e^{7-5x} + C$
- 4) $\frac{1}{5}e^{7-5x} + C$

3. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$?

- 1) $\frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + C$
- 2) $\operatorname{tg} 3x + C$
- 3) $-\operatorname{ctg} 3x + C$
- 4) $-\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x + C$

4. Найти интеграл $\int \frac{x^3}{x^4 - 3} dx$.

- 1) $\frac{3}{4} \ln|x^4 - 3| + C$
- 2) $\ln|x^4 - 3| + C$
- 3) $\frac{1}{4} \ln|x^4 - 3| + C$
- 4) $\frac{1}{3} \ln|x^4 - 3| + C$

5. Правильную рациональную дробь $\frac{x+4}{(x+1)^2 x}$ можно представить в виде суммы простейших дробей ...

- 1) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x}$
- 2) $\frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x}$
- 3) $\frac{Ax+B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x}$
- 4) $\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2} + \frac{B}{x}$

6. Если $f(x)$ определена в точке a , то чему равен $\int_a^a f(x)dx$?

- 1) $F(a)$
- 2) a
- 3) a^2
- 4) 0

7. Вычислить определённый интеграл $\int_0^1 (3x^2 + 2x - 1)dx$.

Тест 3

1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если ...

- 1) выполняется равенство $f'(x) = F(x)$
- 2) выполняется равенство $F'(x) = f(x)$
- 3) выполняется равенство $F'(x) = 0$
- 4) выполняется неравенство $F'(x) \geq 0$

2. Множество первообразных функции $y = 3 \sin 6x$...

- 1) $3 \cos 6x + C$
- 2) $-3 \cos 6x + C$
- 3) $-0,5 \cos 6x + C$
- 4) $0,5 \cos 6x + C$

3. Чему равен неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{4+x^2}$?

- 1) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$
- 2) $\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$
- 3) $\ln(4+x^2) + C$
- 4) $\frac{1}{2} \ln x + C$

4. Найти интеграл $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-1}} dx$.

- 1) $\sqrt{x^4-1} + C$
- 2) $\arcsin \frac{x^2}{2} + C$
- 3) $\arcsin x + C$
- 4) $\frac{1}{2} \sqrt{x^4-1} + C$

5. Правильную рациональную дробь $\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+4x+5)^2}$ можно представить в виде суммы простейших дробей ...

1) $\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5} + \frac{Dx+E}{(x^2+4x+5)^2}$

2) $\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2+4x+5)^2}$

3) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x^2+4x+5)^2}$

4) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^2+4x+5} + \frac{C}{(x^2+4x+5)^2}$

6. Согласно теореме о среднем если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то найдётся точка $c \in [a; b]$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = \dots$

1) $(b-a) \cdot f(c)$

2) $ab \cdot f(c)$

3) $f(c)$

4) $F(c)$

7. Вычислить определённый интеграл $\int_1^5 (3x^2 + 2x + 1)dx$.

Тест 4

1. Чему равна производная от неопределённого интеграла $\left(\int f(x)dx\right)'$?

1) $f(x)$

2) $f(x)dx$

3) $F(x)$

4) $F(x) + C$

2. Множество первообразных функции $y = 10\sin(5x + 6) \dots$

1) $10\cos(5x + 6)$

2) $2\cos(5x + 6)$

3) $-2\cos(5x + 6)$

4) $-10\cos(5x + 6)$

3. Чему равен неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$?

1) $\frac{1}{2} \ln|x+2| + C$

2) $\ln|x + \sqrt{x^2 + 4}| + C$

3) $\arcsin \frac{x}{2} + C$

4) $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{2} + C$

4. Найти интеграл $\int \frac{x^2}{x^6 + 4} dx$.

1) $\operatorname{arctg} \frac{x^4}{2} + C$

2) $\ln|x^3 + 2| + C$

3) $\frac{1}{6} \ln|x^3 + 2| + C$

4) $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{2} + C$

5. Правильную рациональную дробь $\frac{9x+15}{x(x+5)^2(x^2+4)}$ можно представить в

виде суммы простейших дробей ...

1) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{(x+5)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$

2) $\frac{A}{x} + \frac{B}{(x+5)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$

3) $\frac{A}{x} + \frac{B}{(x+5)^2} + \frac{C}{x^2+4}$

4) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{(x+5)^2} + \frac{D}{x^2+4}$

6. Если $f(x)$ - нечётная функция, то $\int_{-a}^a f(x) dx$ равен ...

1) $2 \int_0^a f(x) dx$

2) $F(a)$

3) 1

4) 0

7. Вычислить $\int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx$.

Тест 5

1. Чему равен дифференциал от неопределённого интеграла $d\left(\int f(x)dx\right)$?

- 1) $f(x)$
- 2) $f(x)dx$
- 3) $F(x)$
- 4) $F(x) + C$

2. Множество первообразных функции $y = 3\cos(4x - 5) \dots$

- 1) $3\sin(4x - 5)$
- 2) $12\sin(4x - 5)$
- 3) $-0,75\sin(4x - 5)$
- 4) $0,75\sin(4x - 5)$

3. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$?

- 1) $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$
- 2) $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$
- 3) $\arcsin \frac{x}{3} + C$
- 4) $\frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{3} + C$

4. Найти интеграл $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$.

- 1) $-\operatorname{arctg}(\sin x) + C$
- 2) $\operatorname{arctg}(\sin x) + C$
- 3) $\ln(1 + \sin^2 x) + C$
- 4) $\frac{1}{1 + \sin^2 x}$

5. Правильную рациональную дробь $\frac{x+1}{x(x-2)^2(x^2+3x+4)}$ можно представить в виде суммы простейших дробей ...

- 1) $\frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3x+4}$
- 2) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{x^2+3x+4}$
- 3) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+3x+4}$

$$4) \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{(x-2)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+3x+4}$$

6. Определённый интеграл – это ...

- 1) числовой интервал
- 2) уравнение
- 3) число
- 4) совокупность функций

7. Вычислить $\int_1^{e^8} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

Модуль IV. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Темы модуля.**
11. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка
 12. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
 13. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
 14. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

СПЕЦИФИКАЦИЯ ЗАДАНИЙ

Номер задания	Тема	Педагогическая цель	Форма (тип)	Трудность	Расчетное время, мин.
Тест по модулю IV					
1	11	Знание	Multiple choice	1	1
2	11	Знание	Multiple choice	2	1
3	12	Понимание	Multiple choice	3	6
4	13	Знание	Multiple choice	3	2
5	14	Понимание	Multiple choice	4	10

Время выполнения теста – 20 минут

Тест 1

1. Каков порядок дифференциального уравнения $y'' - 4(y')^3 - 3y = 0$?
 - 1) первый
 - 2) второй
 - 3) третий
 - 4) четвертый
2. Уравнение $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$ является ...
 - 1) с разделяющимися переменными
 - 2) однородным
 - 3) линейным первого порядка
 - 4) линейным второго порядка

3. Общее решение дифференциального уравнения $y' + \frac{1}{x}y = 1 + \frac{1}{x}$ имеет вид...

1) $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + C$

2) $y = \frac{x^2 + 2x + C}{2}$

3) $y = \frac{x}{2} + \frac{C}{x} + 1$

4) $y = \frac{x^2}{2} + x + C$

4. Порядок дифференциального уравнения $y'' + \frac{2x}{x^2 + 4}y' - x = 0$ можно понизить заменой ...

1) $y' = p(x)$

2) $y' = z(y)$

3) $y'' = p(x)$

4) $y'' = z(y)$

5. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 7y' + 6y = 2xe^{6x}$ является ...

1) $y = e^{6x} \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{25}x + C_1 \right) + C_2$

2) $y = e^{6x} \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{25}x + C_1 \right) + C_2x + 1$

3) $y = e^x + C_2e^{6x} \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{25}x + C_1 \right)$

4) $y = C_2e^x + e^{6x} \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{25}x + C_1 \right)$

Тест 2

1. Каков порядок дифференциального уравнения $y'' + 4y(y')^3 = 0$?

1) первый

2) второй

3) третий

4) четвертый

2. Уравнение $y' + \frac{1}{x}y = 1 + \frac{1}{x}$ является ...

1) с разделяющимися переменными

2) однородным

3) линейным первого порядка

4) линейным второго порядка

3. Общее решение дифференциального уравнения $xy' - 2y = 2x^4$ имеет вид...

1) $y = x^4 + Cx^2$

2) $y = x^2 + Cx$

3) $y = x^2(1 + Cx^2)$

4) $y = \frac{x^2 + C}{x^2}$

4. Порядок дифференциального уравнения $(1 - x^2)y'' = 1 + 2xy'$ можно понизить заменой ...

1) $y'' = p(x)$

2) $y'' = z(y)$

3) $y' = z(y)$

4) $y' = p(x)$

5. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 16y = 16 \sin 2x$ является ...

1) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} + \frac{12}{25} \cos 2x + \frac{16}{25} \sin 2x$

2) $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} + \frac{12}{25} \cos 2x + \frac{16}{25} \sin 2x$

3) $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} + \frac{16}{25} \cos 2x + \frac{12}{25} \sin 2x$

4) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} + \cos 2x + \sin 2x$

Тест 3

1. Каков порядок дифференциального уравнения

$$4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx ?$$

1) первый

2) второй

3) третий

4) четвертый

2. Уравнение $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$ является ...

1) с разделяющимися переменными

2) однородным

3) линейным первого порядка

4) линейным второго порядка

3. Общее решение дифференциального уравнения $y' + \frac{4x}{x^2 + 1} y = \frac{1}{x^2 + 1}$ имеет вид ...

$$1) y = \frac{x^3 + x + C}{(x^2 + 1)^2}$$

$$2) y = \frac{x^3}{3} + x + C$$

$$3) y = \left(\frac{x^3}{3} + x + C \right) (x^2 + 1)^2$$

$$4) y = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \left(\frac{x^3}{3} + x + C \right)$$

4. Порядок дифференциального уравнения $y \cdot y'' = (y')^2$ можно понизить заменой ...

$$1) y' = p(x)$$

$$2) y' = z(y)$$

$$3) y'' = p(x)$$

$$4) y'' = z(y)$$

5. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 13y = 3x^2 - 1$ является ...

$$1) y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{3}{13}x^2 + \frac{24}{169}x + \frac{145}{169}$$

$$2) y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{3}{13}x^2 + \frac{12}{13}x + \frac{14}{13}$$

$$3) y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{3}{13}x^2 + \frac{24}{169}x - \frac{151}{2197}$$

$$4) y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{3}{13}x^2 + \frac{12}{13}x + \frac{14}{13}$$

Тест 4

1. Каков порядок дифференциального уравнения $y''' = \frac{y''}{x} + x^4$?

1) первый

2) второй

3) третий

4) четвертый

2. Уравнение $y'' - 2y' - 3y = 2x$ является ...

1) с разделяющимися переменными

2) однородным

3) линейным первого порядка

4) линейным второго порядка

3. Общее решение дифференциального уравнения $y' + \frac{10}{x}y = \frac{5}{x^{10}}$ имеет

вид...

1) $y = 5x(x^{10} + C)$

2) $y = \frac{5x + C}{x^{10}}$

3) $y = \frac{5x}{x^{10} + C}$

4) $y = \frac{5x^{10} + C}{x^5}$

4. Порядок дифференциального уравнения $y'' + 2y(y')^3 = 0$ можно понизить заменой ...

1) $y' = p(x)$

2) $y' = z(y)$

3) $y'' = p(x)$

4) $y'' = z(y)$

5. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 3y' = 5x + 4$ является...

1) $y = C_2 e^{3x} - \frac{5}{6}x^2 - \frac{17}{9}x + C_1$

2) $y = C_2 e^x - \frac{5}{6}x^2 - \frac{17}{9}x + \frac{12}{17} + C_1$

3) $y = C_2 e^{3x} - \frac{17}{3}x^3 + C_1$

4) $y = C_1 e^{2x} - \frac{5}{6}x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{12}{17} + C_2$

Тест 5

1. Каков порядок дифференциального уравнения $y^{IV} + y''' - (y')^2 = 0$

1) первый

2) третий

3) четвертый

4) второй

2. Уравнение $\sqrt{4 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy$ является ...

1) с разделяющимися переменными

2) однородным

3) линейным первого порядка

4) линейным второго порядка

3. Общее решение дифференциального уравнения $(1+x^2)y' - y = e^{\operatorname{arctg} x}$ имеет вид ...

1) $y = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\operatorname{arctg} x + C}$

2) $y = e^{\operatorname{arctg} x} (\operatorname{arctg} x + C)$

3) $y = \frac{\operatorname{arctg} x + C}{e^{\operatorname{arctg} x}}$

4) $y = e^{\operatorname{arctg} x} (C + x^2)$

4. Порядок дифференциального уравнения $y''(e^x + 1) + y' = 0$ можно понизить заменой ...

1) $y'' = p(x)$

2) $y' = z(y)$

3) $y' = p(x)$

4) $y'' = z(y)$

5. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = e^x(2x - 1)$ является ...

1) $y = e^x \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_2x + C_1 \right)$

2) $y = e^{3x} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + C_2x + C_1 \right)$

3) $y = C_1 e^{2x} \left(\frac{1}{3}x^2 + x + C_2 \right)$

4) $y = e^{2x} \left(\frac{1}{3}x^2 + C_2x + C_1 \right)$

ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

СПЕЦИФИКАЦИЯ ЗАДАНИЙ

Номер задания	Модуль	Педагогическая цель	Форма (тип)	Трудность	Расчетное время, мин.
Тест по курсу «Математический анализ»					
1	I	Понимание	Цифровой ввод	1	4
2	I	Понимание	Цифровой ввод	1	4
3	I	Понимание	Цифровой ввод	1	5
4	III	Понимание	Цифровой ввод	2	5
5	III	Понимание	Цифровой ввод	3	10
6	II	Понимание	Цифровой ввод	2	6
7	II	Понимание	Цифровой ввод	3	7
8	IV	Понимание	Multiple choice	2	6
9	IV	Понимание	Multiple choice	3	8
10	IV	Понимание	Multiple choice	2	5

Время выполнения теста – 60 минут

Тест 1

1. Вычислить предел функции $\sqrt{3} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}}{x-4}$.
2. Найти значение параметра a , при котором на всей числовой прямой непрерывна функция $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x \leq 2, \\ x - a, & \text{если } x > 2. \end{cases}$
3. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$ на отрезке $[1; 6]$.
4. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi/4} 80 \cos x \sin^3 x dx$.
5. Найти площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 6 - 5x^2$.

6. Найти градиент функции $z = \ln \sqrt{5x^2 - y^2}$ в точке $A(1; 1)$. В ответе укажите сумму его координат.
7. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2$.
8. Общим решением дифференциального уравнения $y'' = \cos 5x$ является ...
- 1) $y = \frac{1}{5} \sin 5x + C_1$
 - 2) $y = -\frac{1}{25} \cos 5x + C_1 x + C_2$
 - 3) $y = -\frac{1}{25} \sin 5x + C_1 x + C_2$
 - 4) $y = -\cos 5x + C_1 x + C_2$
9. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 5y' + 6y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = -6$.
- 1) $y = e^{5x} - 6e^x$
 - 2) $y = 3e^{2x} - 4e^{3x}$
 - 3) $y = -6e^{-2x} + e^{-3x}$
 - 4) $y = -3e^{-2x} + 4e^{-3x}$
10. Частное решение y^* линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x$ нужно искать в виде...
- 1) $y^* = Ax \sin 2x$
 - 2) $y^* = Ae^{2x} + Be^{-6x}$
 - 3) $y^* = e^{-6x} (A \sin 2x + B \cos 2x)$
 - 4) $y^* = A \sin 2x + B \cos 2x$

Тест 2

1. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}}$.
2. Найти значение параметра a , при котором на всей числовой прямой непрерывна функция $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x \leq 2, \\ ax - 2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$
3. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ на отрезке $[-5; -1]$.
4. Вычислить определенный интеграл $\int_1^{e^3} \frac{5 dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$

5. Найти площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 9 - 8x^2$.
6. Найти градиент функции $z = y + \sqrt{x}$ в точке $A(1; 4)$. В ответе укажите сумму его координат.
7. Найти экстремум функции $z = -5x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 4$.
8. Общим решением дифференциального уравнения $y'' = \sin 3x$ является ...
 - 1) $y = -\sin 3x + C_1x + C_2$
 - 2) $y = -\frac{1}{9}\cos 3x + C_1x + C_2$
 - 3) $y = -\frac{1}{3}\cos 3x + C_1$
 - 4) $y = -\frac{1}{9}\sin 3x + C_1x + C_2$
9. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 10y' + 25y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.
 - 1) $y = -e^{-5x} + e^{5x}$
 - 2) $y = (1 - 6x)e^{5x}$
 - 3) $y = 1 - 6e^{5x}$
 - 4) $y = (6 - x)e^{5x}$
10. Частное решение y^* линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$ нужно искать в виде...
 - 1) $y^* = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$
 - 2) $y^* = A\sin x + B\cos x$
 - 3) $y^* = (Ax + B)\cos x$
 - 4) $y^* = e^{-2x}(A\sin x + B\cos x)$

Тест 3

1. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}$.
2. Найти значение параметра a , при котором на всей числовой прямой непрерывна функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 2, \\ ax + 2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$
3. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$ на отрезке $[-6; -1]$.

4. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi/2} 9 \sin x \cos^2 x \, dx$.
5. Найти площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 3 - 2x^2$.
6. Найти градиент функции $z = \operatorname{arctg}(xy)$ в точке $A(1; 1)$. В ответе укажите сумму его координат.
7. Найти экстремум функции $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4$.
8. Общим решением дифференциального уравнения $y'' = 4 \cos 2x$ является ...
- 1) $y = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2$
 - 2) $y = 2 \sin 2x + C_1$
 - 3) $y = -\cos 2x + C_1 x + C_2$
 - 4) $y = -\sin 2x + C_1 x + C_2$
9. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 3y' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
- 1) $y = 2e^x - e^{-3x}$
 - 2) $y = 3e^{3x} - e^{-3x}$
 - 3) $y = 2 - e^{-3x}$
 - 4) Правильный ответ отсутствует
10. Частное решение y^* линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ нужно искать в виде...
- 1) $y^* = A x e^{2x}$
 - 2) $y^* = A x^2 + e^{2x}$
 - 3) $y^* = (A x^2 + B x + C) e^{2x}$
 - 4) $y^* = A x^2 e^{2x}$

Тест 4

1. Вычислить предел функции $\sqrt{6} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{8-x}}{x-2}$.
2. Найти значение параметра a , при котором на всей числовой прямой непрерывна функция $f(x) = \begin{cases} 3x + a, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$
3. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ на отрезке $[1; 5]$.

4. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \frac{32x \, dx}{(x^2 + 1)^3}$.
5. Найти площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 8 - 7x^2$. В ответе укажите значение $3S$.
6. Найти градиент функции $z = \ln(-x + y)$ в точке $A(1; 4)$. В ответе укажите сумму его координат.
7. Найти экстремум функции $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$.
8. Общим решением дифференциального уравнения $y'' = \frac{1}{x^2}$ является ...
- 1) $y = -\frac{2}{x^3} + C_1x + C_2$
 - 2) $y = -\ln|x| + C_1x + C_2$
 - 3) $y = x^3 + C_1x + C_2$
 - 4) $y = -\frac{1}{x} + C_1$
9. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 9y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$.
- 1) $y = 2\cos 3x - \sin 3x$
 - 2) Правильный ответ отсутствует
 - 3) $y = 2e^{3x} - e^{-3x}$
 - 4) $y = 2\sin 9x - \cos 9x$
10. Частное решение y^* линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 4y' + 3y = 2x + 1$ нужно искать в виде...
- 1) $y^* = Ae^{3x} + Be^x$
 - 2) $y^* = Ax^2 + Bx$
 - 3) $y^* = Ax + B$
 - 4) $y^* = (Ax + B)e^x$

Тест 5

1. Вычислить предел функции $\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{6 - x}}$.
2. Найти значение параметра a , при котором на всей числовой прямой непрерывна функция $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x \leq 2, \\ ax - 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$
3. Найти наименьшее значение функции $y = 2x^2 - \ln x$ на отрезке $[1; e]$.

4. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 3(4x^3 + 1)^3 x^2 dx$.
5. Найти площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x^2$. В ответе укажите значение $3S$.
6. Найти градиент функции $z = \frac{\sqrt{x}}{y}$ в точке $A(1; 2)$. В ответе укажите сумму его координат.
7. Найти экстремум функции $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$.
8. Общим решением дифференциального уравнения $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$ является ...
- 1) $y = -\ln |\cos x| + C_1 x + C_2$
 - 2) $y = -\ln |\operatorname{tg} x| + C_1 x + C_2$
 - 3) $y = \ln |\cos^2 x| + C_1 x + C_2$
 - 4) $y = -\frac{1}{\cos x} + C_1 x + C_2$
9. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 7y' + 12y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.
- 1) $y = -e^{-3x} - 2e^{-4x}$
 - 2) $y = -9e^{3x} + 7e^{4x}$
 - 3) Правильный ответ отсутствует
 - 4) $y = e^{4x}(-9 \cos 3x + 7 \sin 3x)$
10. Частное решение y^* линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 4y = \sin 2x$ нужно искать в виде...
- 1) $y^* = A \sin 2x + B \cos 2x$
 - 2) $y^* = x^2(A \sin 2x + B \cos 2x)$
 - 3) $y^* = (Ax + B) \sin 2x$
 - 4) $y^* = x(A \sin 2x + B \cos 2x)$

6. Задачи для самостоятельного решения

Модуль I.

1. Числовые последовательности

1. Выпишите пять первых членов последовательностей:

$$\text{а) } x_n = \frac{(-1)^n}{n}; \quad \text{б) } x_n = 4; \quad \text{в) } x_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2 - 1}, & n - \text{чётное}, \\ \frac{n-1}{n}, & n - \text{нечётное}. \end{cases}$$

2. Определите правило составления числовой последовательности: 1; 3; 5; 7; 9; Запишите формулу общего члена последовательности.

3. Найдите пределы последовательностей:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 5n + 2}{3n^2 - 6n + 4}; \quad \text{б) 4) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n+3}{\sqrt{n^2 + 5n + 1}}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot 7^n}{7^n + 1}.$$

2. Функции одной переменной. Предел функции

1. Установить, какие из следующих функций чётные, какие нечетные, а какие общего вида.

$$\text{а) } y = \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x} + 3x}; \quad \text{б) } y = \lg \frac{1-x}{1+x}; \quad \text{в) } y = 3^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x; \quad \text{г) } y = x^3|x|.$$

2. Найдите область определения функций.

$$\text{а) } y = \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x} + 3x}; \quad \text{б) } y = \lg \frac{1-x}{1+x}; \quad \text{в) } y = 3^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x; \quad \text{г) } y = x^3|x|.$$

3. Вычислите пределы функций:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} (5x^3 - 6x^2 + x - 5); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}.$$

4. Найдите пределы дробно-рациональных функций:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x - 1}{x^2 + 4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^5 + 1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + x - 1}{2x^2 + x + 1}.$$

5. Вычислите пределы функций:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sin(1-2x)}{4x^2 - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^{3x+1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow e} \frac{3 \ln x - 3}{x - e};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$$

3. Непрерывность функции

1. Показать, что при $x = 4$ функция $y = \frac{x}{x-4}$ имеет разрыв.

2. Исследовать на непрерывность функцию $y = x^2 - 2$ при $x = 3$.

3. Для заданных функций найти точки разрыва и исследовать их характер:

$$\text{а) } y = \frac{x}{x-3}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{x^2 - 6x + 8}; \quad \text{в) } y = 3^{\frac{1}{x}}; \quad \text{г) } y = \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}}.$$

4. Задана функция. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертёж.

$$y = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x \leq -2; \\ x^2 - 4, & \text{если } -2 < x < 1, \\ 4 - 2x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

5. Исследовать функцию на непрерывность: найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематически график функции.

$$y = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x+1}, & \text{если } x < -1, \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

4. Производная функции одной переменной

1. Найти производные функций, используя правила вычисления производных.

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= 3x^2 - \sin x; & \text{б) } y &= \left(\frac{1}{6}x^{12} + 4\sqrt[8]{x^5} - 3 \right)^3 \\ \text{в) } y &= (\cos x)^{4x}; & \text{г) } \operatorname{arctg} y + 3x^2 + xy^2 &= 0. \end{aligned}$$

2. Найти производные второго порядка.

$$\text{а) } y = \frac{x-4}{x^2+9}; \quad \text{б) } y = x + 2\sqrt{x}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$$

3. Найти дифференциал функций.

$$\text{а) } y = \cos(\ln x); \quad \text{б) } y = \frac{\sin x}{1+2x}; \quad \text{в) } y = x \operatorname{arctg} x.$$

4. Вычислить приближенно, используя дифференциал функции.

а) $0,97^4$; б) $\sqrt{36,07}$; в) $\ln \sqrt[5]{1,02}$

5. Исследование функции одной переменной

1. Вычислить пределы функций, используя правило Лопиталя.

а) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 - 25x + 25}{2x^2 - 15x + 25}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 6x \operatorname{ctg} 2x$.
при $x_0 = 5$; $x_0 = \infty$.

2. Исследовать на монотонность функцию $y = (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$.

3. Найти точки экстремумов функции $y = \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 3}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + 2\sqrt{x}$, непрерывной на отрезке $[0, 4]$.

5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости графика функции $y = \frac{\ln x}{x^2}$.

6. Найти асимптоты кривых.

а) $y = \frac{1}{6}x^3(x^2 - 5)$; б) $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$.

7. Исследовать функции и построить их график.

а) $y = -\frac{8x}{x^2 + 4}$; б) $y = x + e^{-x}$

Модуль II

6. Функции нескольких переменных

1. Найдите пределы функций.

а) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$; б) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -3}} \frac{\ln(3 + x^2 + y)}{2 + y + x^2}$; в) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$.

2. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \leq 1; \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

7. Дифференцируемость функций нескольких переменных

1. Показать, что функция $z = \arcsin \frac{x-y}{x+y}$, удовлетворяет заданному уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

2. Вычислить частные производные первого и второго порядков функции $z = \ln(x + e^{-y})$.

3. Найти дифференциал второго порядка функции.

а) $z = \ln(e^x + e^y)$; б) $z = e^x (\cos y + \sin y)$.

4. Найти градиент функции $z = \ln \sqrt{5x^2 - y^2}$ в точке $A(1; 1)$ и производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}(2, -1)$.

8. Приложения частных производных функций двух переменных

1. Исследовать на экстремум функцию $z = f(x, y)$

а) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2$; б) $z = -5x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 4$.

2. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(1; 0; 0)$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в заданной области.

а) $z = x^2 - y^2 + 2xy - 2x + 2y + 3$, в треугольнике, ограниченном прямыми $y = 0$, $x = 2$, $y = x + 2$.

б) $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ в области, ограниченной параболой $y = x^2$, прямой $y = 4$ и осью Oy ($x \geq 0$).

Модуль III

9. Неопределённый интеграл

1. Найти интегралы, используя метод непосредственного интегрирования.

а) $\int (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 2) dx$; б) $\int \left(x^{-5} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{4x^3} \right) dx$.

2. Найти интегралы, используя подведение под знак дифференциала.

а) $\int e^{\cos 2x} \sin 2x dx$; б) $\int 2xe^{-x^2} dx$.

3. Используя подходящую подстановку, найти неопределённые интегралы.

а) $\int \frac{3x^6 dx}{\sqrt[6]{1-x^7}}$; б) $\int \frac{6x}{\sqrt[4]{4+x^2}} dx$.

4. Используя метод интегрирования по частям, найти интегралы.

а) $\int (1-6x)e^{2x} dx$; б) $\int (5x+6) \cos 2x dx$.

5. Найти интегралы от рациональных функций.

а) $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx$; б) $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} dx$.

10. Определённый интеграл

1. Вычислить определённые интегралы.

а) $\int_1^4 \left(1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2} \right) dx$; б) $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$; в) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 - \sin x}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертеж.

а) $y = x^2$, $y = 8 - 7x^2$; б) $y = x^2$, $y = 9 - 8x^2$.

3. Исследовать на сходимость несобственный интеграл.

а) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$; в) $\int_{-\infty}^1 (x^2 + 1) dx$.

Модуль IV

11. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

а) $3(x^2 y + y)dy + \sqrt{2 + y^2} dx = 0$; б) $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$;

в) $2xdx - 2ydy = x^2 ydy - 2xy^2 dx$; г) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.

2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

а) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$; б) $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$;

в) $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$; г) $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$.

12. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

1. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

а) $y' + \frac{2}{x}y = x^3$; б) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}$;

в) $y' - \frac{1}{x}y = -\ln x$; г) $y' - \frac{x}{x^2 + 1}y = x$.

2. Найти общее решение уравнения Бернулли.

а) $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$; б) $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$.

13. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

1. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение степени.

а) $y'' = y' + x$; б) $y'' = x + \sin x$;

в) $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$; г) $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$;

д) $y'' + 2y(y')^3 = 0$; е) $x^2 y'' = y'^2$.

14. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее начальным условиям.

а) $y'' - 10y' + 25y = 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 1;$

б) $y'' + 3y' = 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$

в) $y'' - 7y' + 12y = 0; \quad y(1) = 1, y'(1) = 1.$

2. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

а) $y'' - 2y' - 3y = 3x + 2;$

б) $y'' + 2y' + y = 2 \cos x$

в) $y'' - 2y' + 5y = e^{2x}.$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические рекомендации по изучению онлайн-курса

Подписано в печать 04.04.2023. Формат бумаги 60x84/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Гарнитура Таймс. Усл. п.л. 3,6. Тираж 100. Заказ 012.

Отпечатано с готового оригинал-макета
на участке оперативной полиграфии
ИП Кучеренко В.О. 385008, г. Майкоп, ул. Пионерская, 403/33.
Тел. для справок 8-928-470-36-87. E-mail: slv01.maykop.ru@gmail.com