

512.64(07)

Л 59

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Майкопский государственный технологический университет»

Инженерный факультет

Кафедра математики, физики и системного анализа

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**Методические рекомендации
по изучению онлайн-курса**

Майкоп - 2023

УДК [512.64+514.12](07)
ББК 22.143+22.151
Л 59

Печатается по решению кафедры
математики, физики и системного анализа ФГБОУ ВО «МГТУ»

Составители:

Беданок М. Мурат Капланович – декан инженерного факультета, доктор экономических наук, профессор кафедры математики, физики и системного анализа ФГБОУ ВО «МГТУ», профессор

Дёмина Т. Татьяна Ивановна – заведующая кафедрой математики, физики и системного анализа ФГБОУ ВО «МГТУ», кандидат физико-математических наук, доцент

Кузьменко Н. Надежда Алексеевна – доцент кафедры математики, физики и системного анализа ФГБОУ ВО «МГТУ», кандидат экономических наук

Шевякова О. Ольга Петровна – доцент кафедры математики, физики и системного анализа ФГБОУ ВО «МГТУ», кандидат физико-математических наук, доцент

Хаконова И. Ирина Магомедовна – доцент кафедры математики, физики и системного анализа ФГБОУ ВО «МГТУ», кандидат педагогических наук, доцент

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. Методические рекомендации по изучению онлайн-курса. – Майкоп: Изд-во «ИП Кучеренко В.О.», 2023. - 64 с.

Методические рекомендации раскрывают порядок изучения раздела «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» с применением онлайн курса.

Рекомендации направлены на оказание помощи преподавателям при организации процесса обучения, а также будут полезны обучающимся для подготовки и прохождения контроля освоения указанного раздела дисциплины «Математика».

© ФГБОУ ВО «МГТУ», 2023

© Беданок М.К., Дёмина Т.И.,
Кузьменко Н.А., Шевякова О.П.,
Хаконова И.М., составление, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

1.	Цели и задачи освоения курса	4
2.	Требования к результатам освоения курса.....	6
3.	Структура курса и расписание.....	7
	3.1. Содержание модулей курса.....	7
	3.2. Распределение модулей по учебным неделям.....	12
4.	Обеспечение и ресурсы для прохождения курса.....	12
	4.1. Мультимедийные материалы.....	12
	4.2. Электронно-библиотечные системы.....	13
	4.3. Список литературы для самостоятельного изучения курса.....	13
5.	Контрольно-измерительные материалы по курсу.....	13
	Модуль I. Алгебра матриц.....	15
	Модуль II. Системы линейных уравнений.....	24
	Модуль III. Элементы векторной алгебры.....	30
	Модуль IV. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве.....	38
	Итоговый тест.....	48
6.	Задачи для самостоятельной работы.....	54

1. Цели и задачи освоения курса

Цель курса: дать студентам основные понятия линейной алгебры и аналитической геометрии, используемые для описания и моделирования, различных по своей природе управленческих, технических и экономических задач; привить студентам навыки использования математических методов в практической деятельности.

Задачей курса является развития навыков решения задач по линейной алгебре и аналитической геометрии.

Курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» предшествует общематематическая подготовка в объёме средней общеобразовательной школы или колледжа.

Для успешного освоения онлайн курса обучающие должны:

знать: основные понятия и методы элементарной математики, геометрии, алгебры и начал математического анализа;

уметь: производить действия с числами; использовать основные алгебраические тождества для преобразования алгебраических выражений; выполнять геометрические построения; доказывать математические утверждения;

владеть: приемами вычислений на калькуляторе инженерного типа; навыками использования математических справочников.

Рекомендуемые направления подготовки:

04.03.01 Химия,
08.03.01 Строительство,
09.03.03 Прикладная информатика,
10.03.01 Информационная безопасность,
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника,
15.03.02 Технологические машины и оборудование,
18.03.01 Химическая технология,
19.03.02 Продукты питания из растительного сырья,
19.03.04 Технология продукции и организации общественного питания,
20.03.01 Техносферная безопасность,
20.05.01 Пожарная безопасность,
21.03.01 Нефтегазовое дело,
21.03.02 Землеустройство и кадастры,
23.03.01 Технология транспортных процессов,
23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов,
27.03.01 Стандартизация и метрология,
27.03.05 Инноватика,
29.03.01 Технология изделий легкой промышленности,
35.03.01 Лесное дело,
35.03.04 Агрономия,
35.03.06 Агроинженерия,

35.03.07 Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции,

35.03.10 Ландшафтная архитектура,

36.03.02 Зоотехния,

38.03.01 Экономика,

38.03.02 Менеджмент,

38.03.04 Государственное и муниципальное управление,

38.03.07 Товароведение,

38.05.02 Таможенное дело,

42.03.01 Реклама и связи с общественностью,

43.03.01 Сервис,

43.03.02 Туризм,

43.03.03 Гостиничное дело.

В результате изучения курса «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» слушатели должны:

знать:

- основные научные принципы и базовые понятия матриц, определителей и действий над ними;
- основные понятия и определения СЛУ, различные методы решения;
- основные понятия и определения векторов и их свойств;
- основные понятия и свойства кривых второго порядка;
- основные понятия и свойства комплексных чисел;
- основные понятия и определения, взаиморасположение прямой и плоскости;
- основные понятия и определения поверхностей второго порядка;

уметь:

- находить значения матричного многочлена;
- находить определители разными способами;
- находить обратную матрицу;
- исследовать системы линейных уравнений;
- находить произведения векторов;
- извлекать корень из комплексного числа, решать уравнения в комплексных числах;
- находить канонические уравнения и строить окружность, эллипс, гиперболу и параболу;
- исследовать прямые и плоскости;
- решать задачи, применяя различные теоремы геометрии;

владеть:

- культурой постановки, анализа и решения задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком математики и навыками грамотного решения задач и представления полученных результатов;

- навыками использования методов обработки экспериментальных данных;
- навыками освоения большого объема информации и решения сложных и нестандартных задач;
- математической символикой, для выражения количественных и качественных соотношений объектов.

2. Требования к результатам освоения курса

Структура курса предусматривает поэтапное формирование следующих результатов обучения (далее – РО).

Индекс	Формулировка	Уровень
РО-1	Способность использовать имеющиеся знания в процессе усвоения нового материала (узнавание ранее изученных объектов, свойств)	Базовый Знать: основные понятия и методы элементарной математики, геометрии, алгебры и начал математического анализа; уметь: производить действия с числами; использовать основные алгебраические тождества для преобразования алгебраических выражений; выполнять геометрические построения; доказывать математические утверждения; владеть: приемами вычислений на калькуляторе инженерного типа; навыками использования математических справочников.
РО-2	Способность использовать новые полученные знания при решении задач (выполнение деятельности по образцу, инструкции или под руководством)	Базовый Знать: основные математические понятия, их свойства и применение; уметь: решать типовые математические задачи разными способами; владеть: основными методами и приемами вычислений при решении задач.
РО-3	Способность критического мышления; применения методов анализа способов решения для выбора оптимального (планирование и самосто-	Базовый Знать: математические понятия, теоремы и их применение, методы решения прикладных задач; уметь: анализировать поставленную задачу, выбирать оптимальное решение, анализировать результат, формулировать прикладные задачи и решать их;

	ательное выполнение деятельности, решение прикладных задач)	владеть: способами доказательств утверждений и теорем; методами и приемами вычислений при решении задач
--	---	---

3. Структура курса и расписание

Объём/ рабочее время курса: 36 часов (1 з.е.)/6 недель.

Форма обучения: онлайн-курс для всех форм обучения.

Курс состоит из модулей – разделов.

В состав курса входят видео-лекции, теоретический материал, задачи для самостоятельного решения. По каждому модулю курса предусмотрены промежуточные тестирования и итоговое тестирование по окончании всего курса.

№ п/п	Наименование модуля	Количество часов
I.	Алгебра матриц	10
II.	Системы линейных уравнений	6
III.	Элементы векторной алгебры	6
IV.	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве	13
	Итоговая аттестация (тест)	1
	Итого	36

3.1. Содержание модулей курса

Модуль	Цель	Наименование раздела	Краткое описание модуля	Видео-ролик
I.	Изучение понятия матрицы. Овладение навыками выполнения операций над матрицами.	1. Основные сведения о матрицах. Операции над матрицами.	1.1. Виды матрицы. 1.2. Линейные операции над матрицами, их свойства. 1.3. Произведение матриц.	1. Произведение матриц.
	Изучение понятия определителя квадратной матрицы.	2. Определители квадратных матриц.	2.1. Определители второго и третьего порядков. 2.2. Понятие определителя n -го порядка.	2. Вычисление определителей высших порядков.

	Овладение навыками вычисления определителей.		2.3. Свойства определителей. 2.4. Понятие минора и алгебраического дополнения элемента определителя. 2.5. Вычисление определителей высших порядков.	
	Изучение понятия обратной матрицы. Освоение методов нахождения обратной матрицы и решения матричных уравнений.	3. Обратная матрица.	3.1. Понятие обратной матрицы. 3.2. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. 3.3. Нахождение обратной матрицы с помощью союзной матрицы.	3. Нахождение обратной матрицы с помощью союзной матрицы.
	Изучение понятия ранга матрицы. Освоение навыков нахождения ранга матрицы.	4. Ранг матрицы.	4.1. Определение ранга матрицы. 4.2. Метод окаймляющих миноров вычисления ранга матрицы. 4.3. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.	4. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
II.	Изучение и освоение методов нахождения решений систем линейных уравнений.	5. Системы линейных уравнений	5.1. Основные понятия теории систем линейных уравнений. Критерий совместности систем линейных уравнений. 5. 2. Решение систем линейных уравнений матричным методом и метод Крамера. 5.3. Метод Гаусса.	5. Решение систем линейных уравнений матричным методом и методом Крамера. 6. Метод Гаусса. Часть 1. 7. Метод Гаусса. Часть 2.

III.	Изучение понятия вектора, его координат. Освоение методов выполнения линейных операций над векторами. Получение навыков использования произведения векторов при решении геометрических и физических задач.	6. Векторы на плоскости и пространстве.	6.1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами. 6.2. Линейная зависимость векторов. Базис. Координаты вектора. 6.3. Скалярное произведение векторов. 6.4. Векторное произведение векторов. 6.5. Смешанное произведение векторов.	8. Векторное произведение векторов. 9. Смешанное произведение векторов.
	Изучение понятий собственного значения и собственного вектора квадратной матрицы.	7. Собственные векторы и собственные значения квадратных матриц.	7.1. Собственные векторы и собственные значения квадратных матриц.	10. Собственные векторы и собственные значения квадратных матриц.
	Развитие понятия о числе: комплексные числа. Освоение навыков выполнения операций с комплексными числами, решения алгебраических уравнений в комплексных числах.	8. Комплексные числа.	8.1. Основные понятия. Геометрическое изображение комплексных чисел. 8.2. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа. 8.3. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. 8.4. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.	11. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

			8.5. Действия над комплексными числами в показательной форме.	
IV.	Освоение способов получения различных видов уравнения прямой на плоскости. Освоение навыков исследования взаимного расположения прямых.	9. Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой.	9.1. Понятие уравнения линии. 9.2. Различные виды уравнения прямой на плоскости. 9.3. Взаимное расположение прямых на плоскости.	12. Взаимное расположение прямых на плоскости.
	Изучение характеристик линий второго порядка. Овладение навыками приведения уравнений линий второго порядка к каноническому виду.	10. Кривые второго порядка.	10.1. Эллипс. 10.2. Гипербола. 10.3. Парабола. 10.4. Общее уравнение линии второго порядка.	13. Эллипс.
	Освоение способов получения различных видов уравнения плоскости. Освоение навыков исследования взаимного расположения плоскостей.	11. Уравнение поверхности и линии в пространстве.	11.1. Понятие уравнения поверхности и линии в пространстве. 11.2. Различные виды уравнения плоскости. 11.3. Взаимное расположение плоскостей.	14. Различные виды уравнения плоскости.
	Освоение способов по-	12. Прямая в пространстве.	12.1. Различные виды уравнения прямой в пространстве.	15. Различные виды уравнения

	лучения различных видов уравнения прямой в пространстве. Освоение навыков исследования взаимного расположения прямых в пространстве, прямой и плоскости.		12.2. Взаимное расположение прямых в пространстве. 12.3. Взаимное расположение прямой и плоскости.	прямой в пространстве.
	Освоение метода параллельных сечений для исследования формы поверхности второго порядка. Изучение способов преобразования уравнений поверхностей второго порядка к каноническому виду.	13. Поверхности второго порядка.	13.1. Классификация поверхностей второго порядка. 13.2. Эллипсоиды. 13.3. Гиперболоиды. 13.4. Параболоиды.	16. Классификация поверхностей второго порядка.
		Итоговый контроль		

3.2. Распределение модулей по учебным неделям

Мо- дуль	Наименование раздела	Коли- чество часов	Компонент	Неделя
I.	1. Основные сведения о матрицах. Операции над матрицами.	2	Промежуточный тест по модулю	1 неделя
	2. Определители квадратных матриц.	4		
	3. Обратная матрица.	2		2 неделя
	4. Ранг матрицы.	2		
II.	5. Системы линейных уравнений.	6	Промежуточный тест по модулю	3 неделя
III.	6. Векторы на плоскости и пространстве.	2	Промежуточный тест по модулю	4 неделя
	7. Собственные векторы и собственные значения квадратных матриц	2		
	8. Комплексные числа.	2		
IV.	9. Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой.	3	Промежуточный тест по модулю	5 неделя
	10. Кривые второго порядка.	4		
	11. Уравнение поверхности и линии в пространстве.	2		6 неделя
	12. Прямая в пространстве.	2		
	13. Поверхности второго порядка.	2		
	Итоговый контроль	1	Итоговый тест	

4. Обеспечение и ресурсы для прохождения курса

4.1. Мультимедийные материалы

1. Современная цифровая образовательная среда в РФ (СЦОС): Режим доступа: <https://online.edu.ru/>
2. Онлайн курс «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»: Режим доступа: <https://www.lektorium.tv/linear-algebra>.

4.2. Электронно-библиотечные системы

1. IPRBooks. Базовая коллекция: электронно-библиотечная система: сайт / Общество с ограниченной ответственностью Компания «Ай Пи Ар Медиа». – Саратов, 2010. – URL: <http://www.iprbookshop.ru/586.html> - Режим доступа: для зарегистрир. пользователей.

2. Znanium.com. Базовая коллекция: электронно-библиотечная система: сайт / ООО «Научно-издательский центр Инфра-М». – Москва, 2011 - URL: <http://znanium.com/catalog> . - Режим доступа: для зарегистрир. пользователей.

4.3. Список литературы для самостоятельного изучения курса

1. Красс, М.С. Математика для экономического бакалавриата: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - М.: ИНФРА-М, 2020. - 472 с.

2. Курс высшей математики. Ч. 1: учебник / М.К. Беданов и др. – Майкоп: Магарин О.Г., 2013. – 384 с.

3. Шипачев, В.С. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. – М.: ИНФРА-М, 2019. - 479 с.

4. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие / В.С. Шипачев. - М.: ИНФРА-М, 2020 - 304 с.

5. Контрольно-измерительные материалы по курсу

Контрольно-измерительный блок по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» включает:

- контрольно-измерительные материалы (тесты) к каждому модулю;
- контрольно-измерительные материалы (тесты) для прохождения итогового экзамена

Контрольно-измерительные материалы к модулям обеспечивают контроль знаний по окончании изучения модуля, включая лекционный материал, задачи для самостоятельного решения и дополнительную литературу.

Комбинация всех заданий обеспечивает проверку всех планируемых результатов обучения. Выбор формы задания соответствует виду оцениваемого результата обучения.

Количество заданий тестового типа в рамках текущего контроля каждого модуля: 5-7 заданий на каждый блок материала с трудоемкостью выполнения 15-30 минут.

Количество заданий тестового типа для итогового экзамена: 10 заданий. Время выполнения 60 минут.

Применяется 100-бальная система оценивания

Описание системы оценивания

Наименование оцениваемого мероприятия	Максимальный балл	Коэффициент весомости	Проходной балл
Промежуточный тест к модулю I.	100	0,15	60
Промежуточный тест к модулю II.	100	0,15	60
Промежуточный тест к модулю III.	100	0,15	60
Промежуточный тест к модулю IV.	100	0,15	60
Итоговый экзаменационный тест	100	0,40	60
Итоговая оценка	100	1	60

Шкала соответствия системы оценивания

Диапазоны шкалы оценивания (100-балльная шкала)	Оценка прописью
90-100	Отлично
75-89	Хорошо
60-74	Удовлетворительно
0-59	Неудовлетворительно

Каждому обучающему предоставляется две попытки прохождения промежуточного теста по каждому модулю и две попытки прохождения итогового экзаменационного тестирования.

Слушатели, которые набрали не менее 60%, получают сертификат о прохождении курса. Сертификат о прохождении курса можно скачать в соответствующем разделе личного кабинета.

После того, как курс пройден, он останется в личном кабинете обучающегося на сайте Лекториума. Слушатели могут обращаться к видео и дополнительным материалам курса в любое время. Оцениваемые тесты после окончания обучения могут быть закрыты.

Модуль I. АЛГЕБРА МАТРИЦ

- Темы модуля.**
1. Основные сведения о матрицах. Операции над матрицами.
 2. Определители квадратных матриц.
 3. Обратная матрица.
 4. Ранг матрицы.

СПЕЦИФИКАЦИЯ ЗАДАНИЙ

Номер задания	Тема	Педагогическая цель	Форма (тип)	Трудность	Расчетное время, мин.
Тест по модулю I					
1	1	Знание	Multiple choice	1	1
2	1	Понимание	Multiple choice	2	2
3	1	Понимание	Multiple choice	4	3
4	2	Понимание	Цифровой ввод	3	3
5	2	Понимание	Multiple choice	3	3
6	3	Применение	Multiple choice	4	4
7	4	Применение	Цифровой ввод	3	4

Время выполнения теста – 20 минут

Тест 1

1. Какие матрицы можно складывать?
 - 1) Квадратные
 - 2) Одинакового размера
 - 3) Невырожденные
 - 4) С одинаковым числом строк
2. Если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, то $2A - B = \dots$
 - 1) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$
 - 2) 3

3) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

4) -10

5) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, тогда матрица $C = A \cdot B$ равна...

1) $\begin{pmatrix} -17 & 16 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ -13 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -17 & 3 & -13 \end{pmatrix}$

4. Определитель $\begin{vmatrix} -5 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \\ 50 & -100 & -50 \end{vmatrix}$ равен...

5. Алгебраическое дополнение элемента a_{23} определителя

$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ имеет вид...

1) $A_{23} = -\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

2) $A_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

3) $A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

4) $A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

6. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2\lambda & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда матрица B будет обратной к матрице A при λ равном...

- 1) -1
- 2) 0
- 3) -1,5
- 4) 1

7. Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ -18 & 0 & 6 \\ 36 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Тест 2

1. Какие матрицы можно умножать?

- 1) с одинаковым числом строк
- 2) одинакового размера
- 3) если количество строк первой матрицы равно количеству столбцов второй матрицы
- 4) если количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы

2. Чему равен элемент c_{21} матрицы $C = 5A + 2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

- 1) 11
- 2) 12
- 3) 16
- 4) 17

3. Какие существуют произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}?$$

- 1) Только AB
- 2) Только BA
- 3) И то и другое
- 4) Ни то ни другое

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 22 & -14 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & 10 & -3 \end{vmatrix}$

5. Алгебраическое дополнение элемента a_{31} определителя

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \text{ имеет вид...}$$

1) $A_{31} = - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

2) $A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

3) $A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

4) $A_{31} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

6. Матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & \lambda & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ не имеет обратной при λ равном...

1) 0

2) 0,5

3) 2

4) -2

7. Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Тест 3

1. Какая матрица имеет обратную?

1) квадратная

2) вырожденная

3) ступенчатая

4) квадратная невырожденная

2. Вычислить сумму элементов первого столбца матрицы

$$C = 2A - 3B, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -6 & 2 \\ 12 & -4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 12 \\ 7 & -12 & 8 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

1) 11

2) 12

3) 13

4) 14

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, тогда матрица

$C = A \cdot B$ равна...

1) $\begin{pmatrix} 20 & 15 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 5 & 15 & 15 \end{pmatrix}$

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 18 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

5. Найти алгебраическое дополнение A_{32} определителя

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

1) -20

2) -17

3) 12

4) 23

6. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда обратная матрица A^{-1}

равна...

1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad \text{Чему равен ранг матрицы } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 15 \end{pmatrix}?$$

Тест 4

1. Какие матрицы можно вычитать?

- 1) Одинакового размера
- 2) Невырожденные
- 3) Квадратные
- 4) С одинаковым числом строк

2. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, то $A + 3B = \dots$

$$1) \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$2) 1$$

$$3) \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$4) -22$$

$$5) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Какие существуют произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}?$$

- 1) И AB , и BA
- 2) Только BA
- 3) Только AB

4) Ни AB , ни BA

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Минор элемента a_{23} определителя $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ имеет вид...

1) $M_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

2) $M_{23} = -\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

3) $M_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

4) $M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

6. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, тогда обратная матрица A^{-1} будет

равна ...

1) $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

4) верный ответ отсутствует

7. Ранг квадратной матрицы A четвертого порядка равен $r(A) = 3$. Тогда определитель этой матрицы равен...

Тест 5

1. Если в квадратной матрице A все элементы, кроме диагональных, равны нулю, то матрица A называется ...

- 1) квадратной
- 2) симметрической
- 3) диагональной
- 4) треугольной

2. Чему равен элемент c_{23} матрицы $C = 5A - 3B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) -9
- 2) -11
- 3) -12
- 4) 6

3. Даны матрицы A и B . Найдено произведение $A \cdot B$, причем $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда матрицей B может быть матрица...

- 1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$
- 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
- 3) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
- 4) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & -4 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

5. Минор элемента a_{31} определителя $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ имеет вид...

- 1) $M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$
- 2) $M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$
- 3) $M_{31} = - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$
- 4) $M_{31} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

6. Обратной к матрице $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ является...

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \frac{3}{55} & -\frac{8}{55} \\ -\frac{4}{55} & \frac{11}{55} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$

7. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 7 & -5 & 9 \\ -3 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ равен двум при λ равном ...

Модуль II. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Темы модуля. 5. Системы линейных уравнений.

СПЕЦИФИКАЦИЯ ЗАДАНИЙ

Номер задания	Тема	Педагогическая цель	Форма (тип)	Трудность	Расчетное время, мин.
Тест по модулю II					
1	5	Знание	Multiple choice	1	2
2	5	Понимание	Multiple choice	2	3
3	5	Понимание	Multiple choice	2	2
4	5	Понимание	Multiple choice	1	2
5	5	Применение	Цифровой ввод	4	6

Время выполнения теста – 15 минут

Тест 1

1. Формулы вида $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ для решения системы линейных уравнений через определители называются формулами ...
 - 1) треугольников
 - 2) Кронекера
 - 3) Капелли
 - 4) Крамера
 - 5) Коши-Буняковского
2. Дана система уравнений $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 6x + 5y = 4. \end{cases}$ Для того чтобы найти значение переменной x при решении этой системы по формулам Крамера, достаточно вычислить только определители...

- 1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$
- 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$

$$3) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

3. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Ранг основной матрицы коэффициентов равен 2, а расширенной матрицы равен 3. Сколько решений имеет система?

- 1) Единственное решение
- 2) Не имеет решений
- 3) Бесчисленное множество решений
- 4) Указанных условий недостаточно для ответа

$$4. \quad \text{В системе уравнений} \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \text{ в качестве} \\ -3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

свободных неизвестных можно выбрать ...

- 1) x_4
- 2) x_5
- 3) x_4, x_5
- 4) x_1, x_2, x_3

$$5. \text{ Решением системы линейных уравнений } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 15, \text{ явля-} \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \end{cases}$$

ется (x_0, y_0, z_0) . Значение x_0 равно...

Тест 2

1. Как называется матрица системы линейных уравнений, дополненная столбцом свободных членов?

- 1) однородная
- 2) расширенная
- 3) жорданова
- 4) классическая
- 5) полная

$$2. \quad \text{Решением системы уравнений} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 11, \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \text{ является ...}$$

- 1) $x_1 = -1; \quad x_2 = -2$
- 2) $x_1 = 0; \quad x_2 = 1$
- 3) $x_1 = 1; \quad x_2 = 3$

4) $x_1 = 1,5; \quad x_2 = -0,5$

5) $x_1 = 2; \quad x_2 = -1$

3. При решении системы уравнений с квадратной матрицей коэффициентов A можно применять матричный метод, если...

- 1) определитель матрицы A не равен нулю
- 2) ранг матрицы A меньше числа ее столбцов
- 3) определитель матрицы A равен нулю
- 4) одна из строк матрицы является линейной комбинацией остальных

4. В системе уравнений
$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_2 - 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$
 в качестве

свободных неизвестных можно выбрать ...

- 1) x_4
- 2) x_1, x_2, x_3
- 3) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
- 4) x_4, x_5

5. Решением системы линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 15, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \end{cases}$$
 является

(x_0, y_0, z_0) . Значение y_0 равно...

Тест 3

1. Для системы линейных уравнений равенство рангов матрицы системы и расширенной матрицы системы является условием ее ...

- 1) определенности
- 2) однородности
- 3) совместности
- 4) несовместности
- 5) неопределенности

2. Основная матрица системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_3 + 2x_2 - x_1 = 1, \\ x_3 - x_2 = 0, \\ x_3 + x_2 = 2 \end{cases}$$
 имеет вид...

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Ранги основной и расширенной матриц коэффициентов этой системы равны 1. Сколько решений имеет система?

- 1) Бесчисленное множество решений
- 2) Не имеет решений
- 3) Единственное решение
- 4) Указанных условий недостаточно для ответа

4. В системе уравнений
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ -3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$
 в качестве ба-

зисных неизвестных можно выбрать ...

- 1) x_4, x_5
- 2) x_5
- 3) x_4
- 4) x_1, x_2, x_3

5. Решением системы линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 15, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \end{cases}$$
 явля-

ется (x_0, y_0, z_0) . Значение z_0 равно...

Тест 4

1. Как называется система линейных уравнений, в которой все свободные члены равны нулю?

- 1) Определенная

- 2) Однородная
- 3) Жорданова
- 4) Классическая
- 5) Базисная

2. Дана система уравнений $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 6x + 5y = 4. \end{cases}$ Для того чтобы найти зна-

чение переменной y при решении этой системы по формулам Крамера, достаточно вычислить только определители...

- 1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$
- 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$
- 3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$
- 4) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$

3. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Ранги основной и расширенной матриц коэффициентов этой системы равны 3. Сколько решений имеет система?

- 1) Единственное решение
- 2) Не имеет решений
- 3) Бесчисленное множество решений
- 4) Указанных условий недостаточно для ответа
- 5)

4. В системе уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_2 - 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$ в качестве

базисных неизвестных можно выбрать ...

- 1) x_4
- 2) x_4, x_5
- 3) x_1, x_2, x_3
- 4) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

5. Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 25, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 37, \end{cases}$ явля-

ется (x_0, y_0, z_0) . Значение x_0 равно...

Тест 5

1. Для системы линейных уравнений неравенство рангов матрицы системы и расширенной матрицы системы является условием ее ...

- 1) определенности
- 2) однородности
- 3) совместности
- 4) несовместности
- 5) неопределенности

2. Решением системы уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -3, \\ 4x_1 + x_2 = -9 \end{cases}$ является ...

- 1) $x_1 = 1,5; \quad x_2 = 0,5$
- 2) $x_1 = 2; \quad x_2 = -2$
- 3) $x_1 = -2; \quad x_2 = -1$
- 4) $x_1 = 1,1; \quad x_2 = 0,8$
- 5) $x_1 = 0,8; \quad x_2 = -1$

3. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Ранги основной и расширенной матриц коэффициентов этой системы равны 1. Сколько свободных переменных можно выбрать?

- 1) Две
- 2) Одну
- 3) Три
- 4) Ни одной

4. Укажите решение матричного уравнения $A \cdot X = B$.

- 1) $X = B \cdot A$
- 2) $X = A^{-1} \cdot B$
- 3) $X = B \cdot A^{-1}$
- 4) $X = \frac{B}{A}$

5. Решением системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 25, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 37, \end{cases}$ является (x_0, y_0, z_0) . Значение y_0 равно...

Модуль III. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Темы модуля.

- 6. Векторы на плоскости и пространстве.
- 7. Собственные векторы и собственные значения квадратных матриц
- 8. Комплексные числа.

СПЕЦИФИКАЦИЯ ЗАДАНИЙ

Номер задания	Тема	Педагогическая цель	Форма (тип)	Трудность	Расчетное время, мин.
Тест по модулю 3					
1	6	Понимание	Multiple choice	2	4
2	6	Понимание	Цифровой ввод	2	4
3	6	Знание	Цифровой ввод	3	5
4	8	Понимание	Multiple choice	4	5
5	8	Знание	Multiple choice	2	4
6	8	Понимание	Multiple choice	2	6
7	7	Знание	Multiple choice	1	2

Время выполнения теста – 30 минут

Тест 1

1. Даны векторы $\vec{a}(3;-2)$, $\vec{b}(6;4)$, $\vec{c}(-3;-2)$. Какие пары векторов образуют базис на плоскости?

- 1) $\vec{a}, \vec{b}$
- 2) $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{a}, \vec{c}$
- 3) $\vec{b}, \vec{c}$
- 4) $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{b}, \vec{c}$
- 5) Никакие

2. Даны векторы $\vec{a}(1;\beta;3)$, $\vec{b}(0;3;-2)$. При каком значении β векторы ортогональны?

3. Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}(1;3;-1), \vec{b}(0;2;-2), \vec{c}(1;-2;1)$, равен...

4. Величина $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ равна ...

1) $e^{\frac{\pi}{2}i}$

2) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

3) $e^{\frac{\pi}{4}i}$

4) $e^{-\frac{\pi}{2}i}$

5) $e^{-\frac{\pi}{4}i}$

5. Если $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, то $\frac{z_1}{z_2}$ равно ...

1) $8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

2) $64\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

3) верный ответ отсутствует

4) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

5) $16(\cos\pi + i\sin\pi)$

6. Корнями квадратного уравнения $x^2 + 2x + 2 = 0$ являются числа ...

1) $2 + 2i, 2 - 2i$

2) $3 + 3i, 3 - 3i$

3) $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

4) $-1 + i, -1 - i$

5) $1 + i, 1 - i$

7. Вектор $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A , соот-

ветствующим собственному значению $\lambda = 2$. Тогда произведение $A \cdot X$ равно...

$$1) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Тест 2

1. Даны векторы $\vec{a}(3;2), \vec{b}(6;4), \vec{c}(-3;-2)$. Какие пары векторов образуют базис на плоскости?

- 1) $\vec{a}, \vec{b}$
- 2) $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{a}, \vec{c}$
- 3) $\vec{b}, \vec{c}$
- 4) $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{b}, \vec{c}$
- 5) Никакие

2. Даны векторы $\vec{a}(1;2;\beta), \vec{b}(0;3;-2)$. При каком значении β векторы ортогональны?

3. Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}(2;3;-3), \vec{b}(0;2;-6), \vec{c}(2;-2;3)$, равен...

4. Величина $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ равна...

- 1) $\frac{3\sqrt{3} + i}{2}$
- 2) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2}$
- 3) $\frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i}{2}$
- 4) $\frac{1 + 3\sqrt{2}i}{2}$

5) верный ответ отсутствует

5. Если $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, то z^3 равно ...

- 1) $8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
- 2) $36\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

3) верный ответ отсутствует

4) $3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

5) $12\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

6. Корнями квадратного уравнения $x^2 - 6x + 18 = 0$ являются числа ...

1) $2 + 2i, \quad 2 - 2i$

2) $3 + 3i, \quad 3 - 3i$

3) $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i, \quad \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

4) $1 + i, \quad 1 - i$

5) $2, 0$

7. Вектор $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению $\lambda = 3$. Тогда произведение $A \cdot X$ равно...

1) $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$

Тест 3

1. Даны векторы $\vec{a}(3;-2), \vec{b}(6;4), \vec{c}(-3;2)$. Какие пары векторов образуют базис на плоскости?

1) $\vec{a}, \vec{b}$

2) $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{a}, \vec{c}$

3) $\vec{b}, \vec{c}$

4) $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{b}, \vec{c}$

5) Никакие

2. Даны векторы $\vec{a}(1;2;3), \vec{b}(\beta;3;-2)$. При каком значении β векторы ортогональны?

3. Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}(2;3;-1), \vec{b}(0;2;-2), \vec{c}(2;-2;1)$, равен...

4. Величина $1 + i$ равна ...

1) $e^{\frac{\pi}{2}i}$

2) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

3) $e^{\frac{\pi}{4}i}$

4) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}$

5) $e^{-\frac{\pi}{4}i}$

5. Если $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, то $z_1 \cdot z_2$ равно ...

1) $16(\cos\pi + i\sin\pi)$

2) верный ответ отсутствует

3) $64\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

4) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

5) $8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

6. Корнями квадратного уравнения $x^2 + 4x + 8 = 0$ являются числа ...

1) $-2 + 2i$, $-2 - 2i$

2) $3 + 3i$, $3 - 3i$

3) $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$, $\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

4) $-1 + i$, $-1 - i$

5) $2 + 2i$, $2 - 2i$

7. Вектор $X = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению $\lambda = 3$. Тогда произведение $A \cdot X$ равно...

1) $\begin{pmatrix} 18 \\ -3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

Тест 4

1. Даны векторы $\vec{a}(-2;5)$, $\vec{b}(2;-10)$, $\vec{c}(-4;10)$. Какие пары векторов образуют базис на плоскости?

1) $\vec{a}$, $\vec{b}$

2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}$, $\vec{c}$

- 3) $\vec{b}, \vec{c}$
- 4) $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{b}, \vec{c}$
- 5) Никакие

2. Даны векторы $\vec{a}(1;2;3), \vec{b}(0;3;\beta)$. При каком значении β векторы ортогональны?

3. Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}(1;3;-3), \vec{b}(0;2;-6), \vec{c}(1;-2;3)$, равен...

4. Величина $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ равна ...

- 1) верный ответ отсутствует
- 2) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
- 3) $1 + \sqrt{3}i$
- 4) $2 + 2\sqrt{3}i$
- 5) $(1 + \sqrt{3}i)/2$

5. Если $z = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, то z^2 равно ...

- 1) $8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
- 2) $3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
- 3) верный ответ отсутствует
- 4) $36\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
- 5) $12\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

6. Корнями квадратного уравнения $2x^2 - 6x + 9 = 0$ являются числа ...

- 1) $2 + 2i, 2 - 2i$
- 2) $2, 0$
- 3) $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$
- 4) $1 + i, 1 - i$
- 5) $3 + 3i, 3 - 3i$

7. Вектор $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению $\lambda = 4$. Тогда произведение $A \cdot X$ равно...

- 1) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 16 \\ -16 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Тест 5

1. Даны векторы $\vec{a}(-2;5), \vec{b}(6;-15), \vec{c}(-4;10)$. Какие пары векторов образуют базис на плоскости?

- 1) $\vec{a}, \vec{b}$
 2) $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{a}, \vec{c}$
 3) $\vec{b}, \vec{c}$
 4) $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{b}, \vec{c}$
 5) Никакие

2. Даны векторы $\vec{a}(1;2;3), \vec{b}(0;\beta;-2)$. При каком значении β векторы ортогональны?

3. Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}(2;3;-1), \vec{b}(0;1;-1), \vec{c}(2;-2;1)$, равен...

4. Величина $\sqrt{3} + i$ равна ...

- 1) $2e^{\frac{\pi}{6}i}$
 2) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$
 3) $e^{\frac{\pi}{6}i}$
 4) $2e^{-\frac{\pi}{6}i}$
 5) $e^{-\frac{\pi}{3}i}$

5. Если $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, то z^3 равно ...

- 1) $8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

2) $64\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

3) верный ответ отсутствует

4) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

5) $16(\cos\pi + i\sin\pi)$

6. Корнями квадратного уравнения $2x^2 + 6x + 9 = 0$ являются числа ...

1) $-2 + 2i, -2 - 2i$

2) $3 + 3i, 3 - 3i$

3) $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

4) $-1 + i, -1 - i$

5) $-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i, -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

7. Вектор $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A , соот-

ветствующим собственному значению $\lambda = -2$. Тогда произведение $A \cdot X$ равно...

1) $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Модуль IV. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Темы модуля.

- 9. Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой.
- 10. Кривые второго порядка.
- 11. Уравнение поверхности и линии в пространстве.
- 12. Прямая в пространстве.
- 13. Поверхности второго порядка.

СПЕЦИФИКАЦИЯ ЗАДАНИЙ

Номер задания	Тема	Педагогическая цель	Форма (тип)	Трудность	Расчетное время, мин.
Тест по модулю IV					
1	9,10	Знание	Multiple choice	1	2
2	9,11,12	Знание	Выбор нескольких вариантов ответа	2	4
3	10,12	Знание	Multiple choice	1	2
4	9,11	Понимание	Multiple choice	2	3
5	9,11	Знание	Multiple choice	1	2
6	10	Понимание	Цифровой ввод	2	4
7	13	Знание	Multiple choice	1	3

Время выполнения теста – 20 минут

Тест 1

1. Любой ненулевой вектор, перпендикулярный данной прямой, называется ... вектором этой прямой.

- 1) коллинеарным
- 2) компланарным
- 3) перпендикулярным
- 4) нормальным
- 5) направляющим

2. Какими уравнениями может задаваться прямая в пространстве?
(Выберите все правильные ответы).

1) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

3) $Ax + By + Cz + D = 0$

4) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

5) $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$

6) $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$

3. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

1) $y^2 = 2px$

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

5) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

6) $x^2 + y^2 = R^2$

4. Если плоскость задана уравнением $4y + 2z + 3 = 0$, то она...

1) проходит через начало координат

2) параллельна оси Ox

3) параллельна плоскости Oyz

4) совпадает с плоскостью Oyx

5) параллельна оси Oy

5. Прямые заданы уравнениями

$$l_1: \frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1}; \quad l_2: \frac{x-x_2}{\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\beta_2},$$

эти прямые параллельны, если...

1) $\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 = 0$

2) $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$

3) $\alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 = 0$

4) $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}$

6. Расстояние между фокусами эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ равно ...

7. Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольно декартовой системе координат задается уравнением

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$

2) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0$

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$

5) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0$

Тест 2

1. Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется... вектором этой прямой.

1) коллинеарным

2) компланарным

3) перпендикулярным

4) нормальным

5) направляющим

2. Какими уравнениями может задаваться плоскость? (Выберите все правильные ответы).

1) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

$$2) A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$3) Ax + By + Cz + D = 0$$

$$4) \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$5) \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$6) \begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$$

3. Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси абсцисс, имеет вид

$$1) y^2 = 2px$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$3) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$4) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$5) \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$6) x^2 + y^2 = R^2$$

4. Если плоскость задана уравнением $3x + 4 = 0$, то она...

1) проходит через начало координат

2) параллельна оси Ox

3) параллельна плоскости Oyz

4) совпадает с плоскостью Oyx

5) параллельна оси Oy

5. Прямые заданы уравнениями

$$l_1 : \frac{x - x_1}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\beta_1}; \quad l_2 : \frac{x - x_2}{\alpha_2} = \frac{y - y_2}{\beta_2},$$

эти прямые перпендикулярны, если...

$$1) \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 = 0$$

$$2) x_1 + x_2 = y_1 + y_2$$

$$3) \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 = 0$$

$$4) \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

$$6. \text{ Расстояние между фокусами эллипса } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ равно } \dots$$

7. Однополостным гиперboloидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольно декартовой системе координат задается уравнением

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

$$2) \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0$$

$$3) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

$$4) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

$$5) \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0$$

Тест 3

1. Множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами, называется...

- 1) гиперболой
- 2) плоскостью
- 3) эллипсом
- 4) окружностью
- 5) параболой

2. Какими уравнениями может задаваться прямая на плоскости?
(Выберите все правильные ответы).

$$1) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$2) A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$3) Ax + By + Cz + D = 0$$

$$4) \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$5) \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$6) \begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$$

3. Угол между прямой $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$ и плоскостью

$Ax + By + Cz + D = 0$ можно найти по формуле...

$$1) \cos \varphi = \frac{|\alpha A + \beta B + \gamma C|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$2) \sin \varphi = \frac{|\alpha A + \beta B + \gamma C|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$3) \operatorname{tg} \varphi = \frac{|\alpha A + \beta B + \gamma C|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

4. Если плоскость задана уравнением $2x + 3z + 5 = 0$, то она...

- 1) проходит через начало координат
- 2) параллельна оси Ox
- 3) параллельна плоскости Oyz
- 4) совпадает с плоскостью Oxy
- 5) параллельна оси Oy

5. Плоскости заданы уравнениями

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

эти плоскости совпадают, если...

$$1) A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

$$2) \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

$$3) \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$4) A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 + D_1D_2 = 0$$

6. Расстояние между фокусами гиперболы $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{44} = 1$ равно ...

7. Двуполостным гиперboloидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольно декартовой системе координат задается уравнением

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

$$2) \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0$$

$$3) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

$$4) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

$$5) \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0$$

Тест 4

1. Множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами, называется...

- 1) гиперболой
- 2) плоскостью
- 3) эллипсом
- 4) окружностью
- 5) параболой

2. Какими уравнениями может задаваться прямая в пространстве? (Выберите все правильные ответы).

$$1) A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$2) \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

$$3) \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

$$4) Ax + By + C = 0$$

$$5) y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$6) \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

3. Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ можно найти по формуле...

$$1) d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$2) d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$$

$$3) d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

4. Если прямая задана уравнением $y + 5 = 0$, то она...

1) проходит через начало координат

2) параллельна оси Ox

3) параллельна плоскости Oyz

4) совпадает с плоскостью Oxy

5) параллельна оси Oy

5. Плоскости заданы уравнениями

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

эти плоскости перпендикулярны, если...

$$1) A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

$$2) \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

$$3) \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$4) A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 + D_1D_2 = 0$$

6. Расстояние между фокусами гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ равно ...

7. Эллиптическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольно декартовой системе координат задается уравнением

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

$$2) \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0$$

$$3) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

$$4) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

$$5) \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0$$

Тест 5

1. Множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус, называется...

- 1) гиперболой
- 2) плоскостью
- 3) эллипсом
- 4) окружностью
- 5) параболой

2. Какими уравнениями может задаваться плоскость? (Выберите все правильные ответы).

1) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

2)
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

3)
$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

4) $Ax + By + C = 0$

5) $y - y_0 = k(x - x_0)$

6)
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

3. Каноническое уравнение эллипса имеет вид

1) $y^2 = 2px$

2)
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

3)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

4. Если прямая задана уравнением $2x + 3y = 0$, то она...

- 1) проходит через начало координат
- 2) параллельна оси Ox
- 3) параллельна плоскости Oyz
- 4) совпадает с плоскостью Oxy
- 5) параллельна оси Oy

5. Плоскости заданы уравнениями

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

эти плоскости параллельны, если...

1) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

2) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

3) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

4) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 + D_1D_2 = 0$

6. Расстояние между фокусами гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ равно ...

7. Гиперболическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольно декартовой системе координат задается уравнением

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$

2) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0$

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$

5) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0$

ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

СПЕЦИФИКАЦИЯ ЗАДАНИЙ

Номер задания	Модуль	Педагогическая цель	Форма (тип)	Трудность	Расчетное время, мин.
Тест по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»					
1	I	Понимание	Цифровой ввод	1	4
2	I	Понимание	Цифровой ввод	1	6
3	II	Понимание	Цифровой ввод	4	8
4	III	Понимание	Цифровой ввод	1	6
5	III	Понимание	Цифровой ввод	2	6
6	IV	Понимание	Цифровой ввод	2	6
7	IV	Понимание	Цифровой ввод	3	6
8	III	Понимание	Цифровой ввод	3	8
9	I	Понимание	Цифровой ввод	1	5
10	I	Понимание	Цифровой ввод	2	5

Время выполнения теста – 60 минут

Тест 1

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите алгебраическое дополнение A_{23} .

2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите сумму элементов, стоящих на главной диагонали обратной матрицы A^{-1} .

3. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ Найдите $x_1 + x_2 - 2x_3$, если (x_1, x_2, x_3) решение системы.

4. Найдите наибольшее собственное значение матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Даны числа $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ и $z_2 = \sqrt{3} + i$. Найдите модуль комплексного числа $z_1 \cdot z_2$.

6. Найдите эксцентриситет гиперболы $144x^2 - 25y^2 = 3600$.

7. Найдите угол между плоскостью $2y + 2z - 3 = 0$ и прямой $\begin{cases} x - y - z = 0, \\ -3x + y + 3z = 0. \end{cases}$ Ответ дайте в градусах.

8. При каком значении A выполняется равенство $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, если $\vec{c} = (1; 5; 2)$, $\vec{b} = (A; 1; -3)$ и $\vec{a} = (1; -1; 2)$

9. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

10. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите сумму элементов второй строки матрицы $A \cdot B$.

Тест 2

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите минор M_{13} .

2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите сумму элементов, стоящих на побочной диагонали обратной матрицы A^{-1} .

3. Если (x_1, x_2, x_3) решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 9, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -14, \end{cases}$ найдите $x_1 + 2x_2 - x_3$.

4. Найдите наименьшее собственное значение матрицы $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Вычислите $|z_1 \cdot z_2|^3$, если $z_1 = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}$ и $z_2 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$.

6. Найдите расстояние от фокуса до директрисы параболы $y = -4x^2$.
7. Найдите наименьший угол между плоскостью $2x + 2z - 5 = 0$ и плоскостью, проходящей через точки $A_1(-2; 0; 0), A_2(0; -2; 0), A_3(-1; -1; 2)$. Ответ дайте в градусах.

8. Найдите высоту CH треугольника ABC , заданного координатами вершин $A(2; 7; -3), B(-1; 11; -3), C(2; 12; -7)$.

9. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & -5 & -1 & -8 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Дана матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите элемент a_{21} матрицы $A = B \cdot B^T$.

Тест 3

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите алгебраическое дополнение A_{31} .

2. При каком значении x матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ x & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ не имеет обратной матрицы?

3. Найдите $2x_1 + x_2 + 2x_3$, если (x_1, x_2, x_3) решение системы линейных уравнений $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 10, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

4. Найдите сумму собственных значений матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Даны числа $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ и $z_2 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$. Найдите мнимую часть числа $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$.

6. Найдите расстояние между фокусами эллипса $25x^2 + 9y^2 = 225$.

7. Найдите угол между плоскостью $2x + 5y + 3z + 2 = 0$ и плоскостью, проходящей через точки $A_1(0; 0; 0)$, $A_2(2; 3; 2)$, $A_3(2; 1; 1)$. Ответ дайте в градусах.

8. При каком значении x точки $A_1(2; 0; 2)$, $A_2(2; 3; 2)$, $A_3(2; 1; 1)$, $A_4(x; 1; 1)$ лежат в одной плоскости.

9. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

10. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите сумму элементов, стоящих на главной диагонали матрицы $A \cdot A^T$.

Тест 4

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите минор M_{13} .

2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & x \end{pmatrix}$. При каком значении x определитель матрицы равен нулю.

3. Найдите $-2x_1 + 3x_2 + x_3$, если (x_1, x_2, x_3) решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7, \\ 7x_1 - x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

4. Найдите $|\lambda_1 - \lambda_2|$, если λ_1 и λ_2 собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Найдите z^4 , если $z = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$.

6. Найдите расстояние от точки $M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ до фокуса параболы $y^2 = 2x$.

7. Плоскость $8x - 4y + 3z - 24 = 0$ пересекает координатные оси в точках A, B, C . Найдите длину средней линии треугольника ABC , параллельной стороне треугольника, лежащей в плоскости Oyz .

8. При каком значении B точки $A_1(3; B; 2)$, $A_2(2; -1; 2)$, $A_3(-1; 1; 1)$, $A_4(0; 1; 1)$ лежат в одной плоскости?

9. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

10. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите сумму элементов, стоящих в первой строке матрицы $A \cdot B$.

Тест 5

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите минор M_{32} .

2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Найдите сумму элементов первой строки обратной матрицы A^{-1} .

3. Найдите $x_1 + 3x_2 + 2x_3$, если (x_1, x_2, x_3) решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = -9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$

4. Найдите $\lambda_1 \cdot \lambda_2$, если λ_1 и λ_2 собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Найдите z^4 , если $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

6. Найдите угол между асимптотами гиперболы $x^2 - y^2 = 4$. Ответ дайте в градусах.

7. При каком значении B прямая $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 3t + 1, \\ z = t - 2, \end{cases}$ и плоскость $x + By - 5z + 8 = 0$ параллельны?

8. При каком значении B точки $A_1(3; -1; 2)$, $A_2(2; -1; B)$, $A_3(-1; 1; 1)$, $A_4(0; 1; 1)$ лежат в одной плоскости?

9. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 1 \\ -2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Дана матрица $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите элемент a_{12} матрицы $A = B \cdot B^T$.

6. Задачи для самостоятельного решения

Модуль I

1. Основные сведения о матрицах. Операции над матрицами

1. Найти значение x , при котором матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x^2 + 4x + 2 \end{pmatrix}$ равны.

2. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $4A - B^T$, где B^T - транспонированная матрица B .

3. Какие существуют произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$? Какую размерность они имеют?

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу AB .

5. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. Найти A^2 .

6. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Определители квадратных матриц

1. Найти значение α , при котором определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & \alpha \end{vmatrix}$ равен нулю.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Найти корень уравнения $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & x \end{vmatrix} = 0$.

4. Найти алгебраические дополнения для всех элементов определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Обратная матрица

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти для нее обратную.

2. Запишите формулу, с помощью которой для матрицы A может быть найдена обратная матрица A^{-1} .

3. При каком значении α матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \alpha \end{pmatrix}$ не имеет обратной матрицы?

4. Найти матрицу обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Найти решение матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 17 & 33 \end{pmatrix}$.

6. Найти решение матричного уравнения $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 17 & 33 \end{pmatrix}$

4. Ранг матрицы

1. Найти значение α , при котором ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \alpha \end{pmatrix}$ равен двум.

2. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 18 \\ 4 & -2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.

Модуль II

5. Системы линейных уравнений

1. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 4. \end{cases}$$

2. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Решить систему: 1) по формулам Крамера; 2) в матричной форме; 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 15, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

4. Решить систему методом Гаусса. Записать общее решение и выделить два частных решения.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$$

5. Исследовать систему на совместность

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

6. Найти решение однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Модуль III

6. Векторы на плоскости и пространстве

1. Даны три вершины параллелограмма $A(1, -2, 3)$, $B(3, 2, 1)$, $C(6, 4, 4)$. Найти его четвертую вершину.

2. Даны вершины треугольника $A(3, -1, 5)$, $B(4, 2, -5)$, $C(-4, 0, 3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A .

3. Проверить коллинеарность векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, если $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = -2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a}(1, 3, 6)$, $\vec{b}(4, 0, 1)$.

4. Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

5. Доказать, что векторы $\vec{a}_1(1, 1, 1)$, $\vec{a}_2(0, 2, 3)$, $\vec{a}_3(0, 1, 5)$ линейно независимы.

6. Даны векторы $\vec{a}(2, 2, 3)$, $\vec{b}(1, 2, 3)$, $\vec{c}(1, 1, 1)$, $\vec{d}(3, 0, -2)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

7. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

8. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \pi/3$.

9. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

10. При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны?

11. При каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?

12. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

13. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$.

14. Найти $|\vec{a} \times \vec{b}|$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30° .

15. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

16. Доказать, что точки $A(5; 7; 2)$, $B(3; 1; -1)$, $C(9; 4; -4)$, $D(1; 5; 0)$ лежат в одной плоскости.

17. Пусть заданы координаты вершин треугольника $A_1(1, 2, -3)$, $A_2(0, 1, 4)$, $A_3(-1, 2, 0)$. Найти:

- 1) площадь треугольника $A_1A_2A_3$;
- 2) высоту треугольника, проведенную к стороне A_1A_2 ;
- 3) проекцию вектора A_1A_2 на вектор A_1A_3 .

18. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}(2; -1; -1)$, $\vec{b}(1; 3; -1)$ и $\vec{c}(1; 1; 4)$.

19. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(1; -3; 1)$, $A_2(-3; 2; -3)$, $A_3(-3; 3; 3)$, $A_4(-2; 0; -4)$. Найти:

- 1) площадь грани $A_1A_2A_3$;
- 2) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

20. Установить компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если:

- а) $\vec{a}(2; 3; -1)$, $\vec{b}(1; -1; 3)$, $\vec{c}(1; 9; -11)$;
- б) $\vec{a}(2; -1; 2)$, $\vec{b}(1; 2; -3)$, $\vec{c}(3; -4; 7)$.

7. Собственные векторы и собственные значения квадратных матриц

1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$,

д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, е) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Комплексные числа

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и показательной формах.

а) $z = 5i$. в) $z = -3\sqrt{3} + 3i$. д) $z = 1 - i$.
б) $z = -2 - 2i$. г) $z = -6$. е) $z = 3 - 3i\sqrt{3}$.

2. Записать комплексные числа в алгебраической и показательной формах.

а) $z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.
б) $z = 5 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$.
в) $z = 2,5 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$.
г) $z = 8 \left(\cos \frac{15\pi}{4} + i \sin \frac{15\pi}{4} \right)$.

3. Записать комплексные числа в алгебраической и тригонометрической формах.

а) $z = 2,6e^{\frac{5\pi}{4}i}$. в) $z = 4e^{\frac{\pi}{4}i}$. д) $z = 1,8e^{\frac{11\pi}{3}i}$.
б) $z = 5e^{\frac{7\pi}{6}i}$. г) $z = 2,4e^{24\pi i}$. е) $z = 8,2e^{11\pi i}$.

4. Данные числа z_1 и z_2 представить в показательной форме и выполнить указанные действия над ними.

а) $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1^2}{z_2}$, если $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$.
б) $z_1^2 \cdot \bar{z}_2, \frac{\bar{z}_2}{z_2}$, если $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, z_2 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$.

5. Выполнить действия:

а) $(2 + 3i)^2$; б) $(5 + 3i)^3$;
в) $(3 - 4i)(3 + 4i)$; г) $\frac{3+5i}{2+6i}$.

6. Решить уравнения.

а) $x^2 + 25 = 0$. в) $x^3 + 27 = 0$. д) $4x^2 - 20x + 26 = 0$.
б) $x^3 - 8 = 0$. г) $x^2 - 2x + 2 = 0$. е) $9x^2 + 12x + 29 = 0$.

7. Произвести действия, предварительно записав комплексные числа в тригонометрической форме.

а) Найти $z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 - i, z_2 = -2 - 2i$.
б) Найти $z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, z_2 = \sqrt{3} + i$.
в) Найти z^5 , если $z = 3 - 3i$.
г) Найти z^3 , если $z = -5 + 5i$.

8. Найти все значения корней:

а) $\sqrt[3]{1}$. в) $\sqrt{i}$. д) $\sqrt[4]{-1}$.

б) $\sqrt{1+i}$. г) $\sqrt[3]{-1+i}$.

Модуль IV

9. Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой

1. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2 .

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, -3)$ и начало координат.

3. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

4. Даны вершины треугольника $A(0; 1)$, $B(6; 5)$, $C(12; -1)$. Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C .

5. Проверить принадлежат ли точки $A(3; 14)$, $B(4; 13)$, $C(-3; 0)$, $D(0; 7)$ прямой $7x - 3y + 21 = 0$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3; -5)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(4; 2)$.

7. Вычислить длину отрезка прямой $3x + 4y - 24 = 0$, заключенного между осями координат.

8. Определить координаты точки, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = 3$, если $A(2; 3)$, $B(-1; 2)$.

9. Общее уравнение $3x - 4y + 2 = 0$ преобразовать в уравнение «в отрезках».

10. Найти расстояние d от точки $A(6; -8)$ до прямой, проходящей через точки $M_1(-5; 0)$ и $M_2(3; 6)$.

11. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых:

а) $x + y - 3 = 0$ и $2x + 2y - 6 = 0$;

б) $x + 2y + 1 = 0$ и $x + 2y + 3 = 0$;

в) $x = 0$ и $x + 3 = 0$.

12. Найти острый угол между прямыми $5x-12y-16=0$ и $3x+4y-12=0$.
13. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 5)$ и имеющей угловой коэффициент $k = 3$.
14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 3)$, перпендикулярно прямой $5x - 4y - 20 = 0$.
15. Составить уравнение прямой, перпендикулярной вектору $\vec{n}(4; -3)$ и проходящей через точку пересечения прямых $x+11y-27=0$ и $6x - 7y - 16 = 0$.

10. Кривые второго порядка

1. Написать уравнение кривой, каждая точка которой находится на одинаковом расстоянии от точки $F(2, 2)$ и от оси Ox . Сделать чертеж.
2. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое ближе к точке $A(1,0)$, чем точка $B(-2,0)$. Сделать чертеж.
3. Эллипс задан уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Найти длину большей оси, длину меньшей оси, расстояние между фокусами и эксцентриситет. Записать координаты фокусов и уравнения директрис.
4. Гипербола задана уравнением $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Найти длину действительной оси, длину мнимой оси, расстояние между фокусами и эксцентриситет. Записать координаты фокусов, уравнения директрис и асимптот. Найти наименьший угол между асимптотами гиперболы.
5. Парабола задана уравнением $y^2 = 9x$. Записать координаты фокуса и уравнение директрисы. Найдите расстояние от фокуса до директрисы.

11. Уравнение поверхности и линии в пространстве

1. Плоскость задана уравнением $3x + 5y - z + 15 = 0$. В каких точках плоскость пересекает оси координат.
2. Найти уравнение плоскости, проходящей через две точки $P(2; 0; -1)$ и $Q(1; -1; 3)$ перпендикулярно плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-3;0;2)$, и перпендикулярной вектору $\vec{n}(2; 3; 5)$.
4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2;3;4)$ и параллельной плоскости $x + 2y - 3z + 4 = 0$.
5. Найти угол между плоскостями: $2x - 3y + 4z - 1 = 0$ и $3x - 4y - z + 3 = 0$.
6. Найти расстояние от точки $A(2; 3; 4)$ до плоскости $4x + 3y + 12z - 5 = 0$.
7. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(2;1; 3)$ и $M_3(0; -1; 2)$.
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;-1;3)$, $B(1; 2; 4)$ и перпендикулярной плоскости $2x - 3y + z + 1 = 0$.
9. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 0; 3)$ параллельно $\vec{p}(1; 0; 1)$ и $\vec{q}(2; 1; 3)$.

12. Прямая в пространстве

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1; 3)$ и параллельной вектору $\vec{q}(4; -5; -6)$.
2. Вычислить угол между прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{2}$ и плоскостью $x + 2y - 3z + 4 = 0$.
3. Вычислить угол между прямой $\frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{4}$ и плоскостью $2x - 3y - 2z + 5 = 0$.
4. Написать каноническое уравнение прямой.
 - а) $\begin{cases} 6x + 5y + 3z + 8 = 0, \\ 6x + 6y - 4z + 4 = 0. \end{cases}$
 - б) $\begin{cases} 3x + 3y + z - 1 = 0, \\ 2x - 3y - 2z + 6 = 0. \end{cases}$
5. Даны точки $M_1(1,1,-1)$, $M_2(2,3,1)$, $M_3(3,2,1)$, $M_4(-3,-7,6)$. Написать уравнение плоскости α , проходящей через точки M_1, M_2, M_3 . Вычислить расстояние от точки M_4 до плоскости α . Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_4 перпендикулярно плоскости α .

6. Найти точку A , симметричную точке $B(2, -2, 3)$ относительно прямой

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+0,5}{0} = \frac{z+1,5}{0}.$$

7. Найти точку A , симметричную точке $B(3, 3, 3)$ относительно плоскости $8x+6y+8z-25=0$.

8. Найти координаты точки пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}$ и плоскости $x+2y+5z+16=0$ и.

13. Поверхности второго порядка

1. Установить тип заданных поверхностей и построить их.

а) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$

б) $x^2 + y^2 - 9z^2 = -1$

в) $16x^2 + y^2 = 4(z-3)$

г) $4y = x^2 - \frac{z^2}{16}$

д) $y^2 = 16z$

е) $z = 9 - x^2 - y^2$

ж) $x^2 - 4y^2 = 9z^2$

з) $x^2 = 2y - 4$

и) $2x^2 + 4x + y^2 - 4y - z^2 = 0$

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические рекомендации по изучению онлайн-курса

Подписано в печать 04.04.2023. Формат бумаги 60х84/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Гарнитура Таймс. Усл. п.л. 4,0. Тираж 100. Заказ 011.

Отпечатано с готового оригинал-макета
на участке оперативной полиграфии
ИП Кучеренко В.О. 385008, г. Майкоп, ул. Пионерская, 403/33.
Тел. для справок 8-928-470-36-87. E-mail: slv01.maykop.ru@gmail.com