

Документ подписан простой электронной подписью

Информационная система

ФИО: Куижева Саида Казбековна

Должность: Ректор

Дата подписания: 08.10.2024 08:38:21

Уникальный программный ключ:

71183e1134ef9cfa69b206d480271b3c1a975e6f

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
филиал федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Майкопский государственный технологический
университет» в поселке Яблоновском**

Политехнический колледж

Учебно-методическое пособие для проведения практических занятий по дисциплине ЕН. 01 Математика

Специальности:

38.02.02 Страхование (по отраслям);

40.02.01 Право и организация социального обеспечения
форма обучения: очная

Яблоновский, 2020

УДК-51(07)
ББК 22.1
У-91

Одобрено предметной (цикловой) цикловой комиссией
информационных и математических дисциплин

Протокол № от ____ июня 20 ____ г

Председатель предметной (цикловой) комиссии

Схаплок А.А.

Разработчик: Шартан Р.Я.– преподаватель первой
категории политехнического колледжа филиала
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Майкопский государственный технологический
университет» в п. Яблоновском

Содержание

Практическое занятие №1. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Сложение двух комплексных чисел	5
Практическое занятие №2. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме	8
Практическое занятие № 3. Выполнение упражнений на определение виды матриц, использование операций над матрицами	10
Практическое занятие №4. Вычисление определителей. Вычисление обратной матрицы.	11
Практическое занятие №5. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.	12
Практическое занятие №6. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.	14
Практическое занятие №7. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.	16
Практическое занятие №8. Выполнение упражнений на нахождение производных.	18
Практическое занятие 9. Исследование и построение графиков функции.	24
Практическая работа № 10. Решение задач на вычисление интегралов.	33
Практическое занятие №11. Вычисление определенного интеграла. Вычисление площади плоских фигур.	39
Практическое занятие №12. Решение задач по разделу «Теория вероятностей и математической статистике»	47

Практическое занятие №1. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Цель: Закрепление умений и навыков выполнения действий над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Сложение двух комплексных чисел.

Сложение двух комплексных чисел выполняются по формуле:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

Пример: Найти сумму двух комплексных чисел $z_1 = 3 + 4i$; $z_2 = -5 + 3i$.

Решение: $z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (-5 + 3i) = (3 - 5) + (4 + 3) i = -2 + 7 i$

1. Выполните сложение комплексных чисел.

- 1) $z_1 = -5 + 5i$, $z_2 = 7 - 7i$;
- 2) $z_1 = -2/3 - 1/4 i$, $z_2 = -1/4 - 5/6 i$;
- 3) $z_1 = -0,6 + 0,2i$, $z_2 = -0,4 - 0,5i$;
- 4) $z_1 = 3,6 + 0,2i$, $z_2 = -1,4 - 0,2i$.
- 5) $z_1 = -3 - 0,7i$, $z_2 = 3 + 0,7i$;
- 6) $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -4 - 5i$.

Вычитание двух комплексных чисел.

Вычитание двух комплексных чисел определяется как действие обратное сложению.

Вычитание двух комплексных чисел находится по формуле

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$$

Пример: Найти разность двух комплексных чисел:
 $z_1=4-3i$; $z_2=-3+5i$.

Решение: $z_1 - z_2 = (4-3i) - (-3+5i) = (4-(-3)) + (-3-5)i = 7-8i$.

2. Найдите разность $z_1 - z_2$ комплексных чисел:

- 1) $z_1=4-2i$, $z_2=3+8i$;
- 2) $z_1=-5/6-3/4i$, $z_2=-5/6+1/4i$;
- 3) $z_1=-7/8+1/5i$, $z_2=-3/8+1/5i$;
- 4) $z_1=1,5-2,1i$, $z_2=0,5+0,9i$.
- 5) $z_1=3/4-1/2i$, $z_2=1/8+3/8i$;
- 6) $z_1=7/8-1/2i$, $z_2=-1/2i$.

Умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме.

Умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме выполняется по формуле:

$$(a_1+bi)(a_2+bi) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

Правило умножения распространяется и на большее число сомножителей.

Пример. Найти произведение комплексных чисел:
 $z_1=3-2i$, $z_2=1+4i$; $z_3=2-i$,

Решение

$$z_1=3-2i, \quad z_2=1+4i; \quad z_3=2-i.$$

$$z_1 z_2 z_3$$

$$z_1 z_2 = (3-2i)(1+4i) = (3 \cdot 1 - (-2 \cdot 4)) + (3 \cdot 4 + 1 \cdot (-2))i = (3+8) + (12-2)i = 11+10i$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = (11+10i) \cdot (2-i) = (11 \cdot 2 - 10 \cdot (-1)) + (11 \cdot (-1) + 2 \cdot 10)i = (22+10) + (-11+20)i = 32+9i$$

При перемножении сопряженных комплексных чисел $z = (a+bi)$ и $\bar{z} = (a-bi)$ получим

$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = r^2$, где r модуль каждого из сомножителей. Итак, произведение двух

сопряженных комплексных чисел является действительным числом, равным r^2 , т.е. квадрату их общего числа.

Равенство $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$ показывает, что сумму квадратов двух действительных чисел можно разложить на комплексные множители. Это разложение на множители невыполнимо во множестве действительных чисел.

3. Найдите произведение комплексных чисел.

- 1) $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -4 + i$;
- 2) $z_1 = 2/3 - 1/4i$, $z_2 = 2/3 + 1/4i$;
- 3) $z_1 = -1 + 6i$, $z_2 = 6 - i$;
- 4) $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 2i$;
- 5) $z_1 = -1 + 6i$, $z_2 = 6 - i$;

Деление комплексных чисел, заданных в алгебраической форме.

Деление комплексных чисел рассматривается как действие, обратное умножению, и производится по

формуле $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$

Пример: Найти частное от деления числа $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 2 - 3i$.

Решение:

$$\frac{3+4i}{2-3i} = \frac{(3+4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{6+9i+8i+12i}{4+9} = \frac{6+17i-12}{4+9} = \frac{-6+17i}{13} = \frac{-6}{13} + \frac{17}{13}i$$

4. Выполните действия.

- 1) $\frac{3-2i}{1+3i}$
- 2) $\frac{(1+2i)(2+i)}{3-2i}$;
- 3) $\frac{(2+3i)}{(4+i)(2-2i)}$;
- 4) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$;
- 5) $\frac{1-3i}{-2+i} - \frac{1+4i}{-1+3i}$;
- 6) $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$.

5. Постройте радиусы-векторы, соответствующие комплексным числам: 1) $z=3+i$;

2) $z=3-i$; 3) $z=-3+i$; 4) $z=2-\sqrt{3}i$

6. Даны числа 1) $z=2-3i$; 2) $z=-2+3i$; 3) $z=-2-3i$; 4) $z=-3-i$; 5) 3; 6) -3; 7) $-i$; 8) .

Назовите числа, сопряженные и противоположные данным.

7. Найдите действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел:

1) $9+2ix+4iy=10i+5x-6y$;

2) $2ix+3iy+17=3x+2y+18i$;

3) $5x-2y+(x+y)i=4+5i$.

Практическое занятие №2. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Цель: Закрепление умений и навыков выполнения действий над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

:

1. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа:

1) $3i$; 2) $-1+i$; 3) $1-i\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}-i$; 5) $-3+4i$.

2. Представьте в алгебраической форме числа:

1) $5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$;

$$2) 4 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right];$$

$$3) \cos \pi + i \sin \pi;$$

$$4) 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right];$$

$$5) 3(\cos 0 + i \sin 0).$$

3. Найдите произведение:

$$1) 3 \left[\cos \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) \right] \cdot \left[\cos \left(\frac{5\pi}{24} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{24} \right) \right];$$

$$2) 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right] \cdot 5 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right];$$

$$3) (\cos 5 + i \sin 5) \cdot (\cos 2 + i \sin 2);$$

$$4) \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right] \cdot \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right];$$

$$5) 4(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ) \cdot 2(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ);$$

$$6) \left[\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right] \cdot \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right].$$

4. Выполните деление в тригонометрической форме:

$$1) 3 \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right] \div \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right];$$

$$2) (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) \div (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ);$$

$$3) \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right] \div \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right];$$

$$4)[\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ] \div [\cos(-120^\circ) + i \sin(-120^\circ)].$$

5. Возведите в степень:

$$1) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^6;$$

$$2) \left[2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) \right) \right]^8;$$

$$3) (\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)^{-12}.$$

Практическое занятие № 3. **Выполнение упражнений на определение виды матриц, использование операций над матрицами.**

Цель: Закрепление умений и навыков по определению вид матриц, выполнению операций над матрицами.

Выполните упражнения:

Пример 1. Вычислить сумму двух матриц

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 9 \\ -6 & -5 & 2 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & 5 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Найти произведение матрицы A на число $\alpha = 6$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 7 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Даны матрицы А и В: $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. Записать соответствующие транспонированные матрицы.

Пример 4. Найти произведение матриц АВ и ВА, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Вычислить матрицу $D = AB - C^2$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Найти произведение матриц ABC, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \\ B = \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -128 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. Вычислить матрицу $D = ABC - 3E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, E - \text{единичная матрица.}$$

Практическое занятие №4. Вычисление определителей. Вычисление обратной матрицы.

Цель: Закрепление умений и навыков вычисления определителей вычисление обратной матрицы.

1. Вычислить определители третьего порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 16 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix};$$

2. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & -3 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Определить, имеет ли матрица A обратную, и если имеет, то вычислите ее

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Практическое занятие №5. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Цель: Закрепление умений и навыков решения систем линейных уравнений методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

имеет единственное решение, находится по формулам Крамера.

$$X = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad Y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad Z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \text{ где}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_2 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_2 \end{vmatrix}$$

Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

$$1) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \text{Вычислим определитель системы } \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot \\ &2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2 - 1 + 2 - 1 + 4 - 1 = 5 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 8 + 11 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot \\ &1 \cdot 8 - 11 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 3 = 6 - 8 + 11 - 8 + 22 - 3 = \\ &20. \end{aligned}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 18 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 8 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 11 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 2 - 8 \cdot 1 \cdot 1 = 22 + 16 + 3 - 11 - 12 - 8 = 10$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 8 + (-1) \cdot 11 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 8 - 1 \cdot 11 \cdot 1 = 8 - 11 + 6 - 3 + 16 - 11 = 5.$$

$$X = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4; \quad Y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \quad Z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$$

ОТВЕТ: (4;2;1).

$$2) \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} 3x - 2y + z = 10, \\ x + 5y - 2z = -15, \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$$

$$5) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

$$6) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -11, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -8, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -8, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -9, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$$

Практическое занятие №6. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель: Закрепление умений и навыков решения систем линейных уравнений методом Гаусса.

Решите системы линейных уравнений методом Гаусса.

$$1) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -9, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение: Выпишем расширенную матрицу данной системы и приведем ее к трапециевидной форме

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & | & 2 \\ 2 & -3 & 4 & | & -9 \\ -1 & 1 & 4 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & | & -2 \\ 2 & -3 & 4 & | & -9 \\ 3 & 4 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & | & -2 \\ 0 & -1 & 12 & | & -13 \\ 0 & -7 & 11 & | & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & | & -2 \\ 0 & -1 & 12 & | & -13 \\ 0 & 0 & 95 & | & -95 \end{pmatrix}$$

Запишем систему, соответствующую этой трапециевидной матрице и решим ее методом обратного хода.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = -2, \\ -x_2 + 12x_3 = -13, \\ 95x_3 = 95. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = -2 + 4 \\ x_2 = -13 + 12, \\ x_3 = -1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -1. \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Ответ: (-1; 1; -1)

$$2) \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$$

$$5) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

$$6) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -11, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -8, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

$$7) \quad \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

$$8 \quad \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -8, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -9, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$$

Практическое занятие №7. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.

Цель: Закрепление умений и навыков решения систем линейных уравнений методом обратной матрицы.

Решением системы линейных уравнений методом обратной матрицы определяется по формуле $X = A^{-1} \cdot B$,

где A^{-1} -обратная матрица матрицы $|A|$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1.Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A – вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если

$|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратной матрицы A^{-1} существует.

2.Находим матрицу A' , транспонированную к A .

3.Находим алгебраические дополнения элементов, транспонированной матрицы $\tilde{A}: \tilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji}$, ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$).

4.Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$ ($|A| \neq 0$)

5.Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1} , исходя из ее определения $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Пример1: Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$$

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 24 - 12 - 27 - 20 - 8 = -58.$$

Вычисляем алгебраические дополнения

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-10 + 12) = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -(10 + 6) = -16$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-5 - 9) = -14$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 6) = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(-4 - 6) = 10$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7.$$

3. Записываем обратную матрицу.

$$A^{-1} = -\frac{1}{58} \begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{58} & \frac{16}{58} & \frac{1}{58} \\ \frac{2}{58} & \frac{14}{58} & -\frac{10}{58} \\ \frac{13}{58} & \frac{4}{58} & -\frac{7}{58} \end{pmatrix}$$

Подставляя значения в формулу решения систем линейных уравнений методом обратной матрицы $X = A^{-1} \cdot B$, получаем

$$X = \begin{pmatrix} \frac{23}{58} & \frac{16}{58} & \frac{1}{58} \\ \frac{2}{58} & \frac{14}{58} & -\frac{10}{58} \\ \frac{13}{58} & \frac{4}{58} & -\frac{7}{58} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{23}{58} \cdot 6 + \frac{16}{58} \cdot 20 + \frac{1}{58} \cdot 6 \\ \frac{2}{58} \cdot 6 + \frac{14}{58} \cdot 20 - \frac{10}{58} \cdot 6 \\ \frac{13}{58} \cdot 6 + \frac{4}{58} \cdot 20 - \frac{7}{58} \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{138+320+6}{58} \\ \frac{12+280-60}{58} \\ \frac{78+80-42}{58} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 8, y = 4, z = 2$.

Решите систему линейных уравнений методом обратной матрицы.

$$1. \begin{cases} 3x - 2y + z = 10, \\ x + 5y - 2z = -15, \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases}$$

Ответ: (1.-2,3).

$$2. \begin{cases} 5x + y - 3z = -2, \\ 4x + 3y + 2z = 16, \\ 2x - 3y + z = 17. \end{cases} \quad \text{Ответ: (8,4,2).}$$

$$3. \begin{cases} x - 2y - z = 2, \\ 3x - 6y - 3z = 6, \\ 5x - 10y - 5z = 10. \end{cases} \quad \text{Ответ: б.м.р.}$$

$$4. \begin{cases} 5x - 3y + 4z = 6, \\ 2x - y - z = 0, \\ x - 2y + z = 0. \end{cases} \quad \text{Ответ: (1,1,1).}$$

**Практическое занятие №8. Выполнение
упражнений на нахождение производных.**

Цель: Закрепить умения и навыки вычисления производных.

Таблица простых производных

$$1. C' = 0$$

$$2. (x^n)' = nx^{n-1}.$$

$$3. \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$4. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$5. \sin' x = \cos x$$

$$6. \cos' x = -\sin x$$

$$7. \operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$8. \operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$9. (e^x)' = e^x$$

$$10. (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$11. \ln' x = \frac{1}{x}$$

$$12. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \quad (|x| < 1)$$

$$13. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \quad (|x| < 1)$$

$$14. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$15. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \cdot$$

Правила вычисления производных.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(c f(x))' = c f'(x)$.

2. Производная суммы (разности) двух функций:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

3. Производная произведения двух функций:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x).$$

4. Производная частного двух функций:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$$

5. Производная сложной функции $y = f(ax+b)$

$$y' = (f(ax+b))' = a f'(ax+b)$$

Пример 1.

Найти производную функции $y = \cos(3x+1)$

Решение

Заданная функция является сложной и её производная равна произведению производной от косинуса на производную от его аргумента

$$y' = (\cos(3x+1))' = -\sin(3x+1) \cdot (3x+1)' = -\sin(3x+1) \cdot (3 \cdot 1 + 0) = -3\sin(3x+1)$$

Ответ: $-3\sin(3x+1)$

Пример2: Вычислить производную функции $y = 5x^2 + 3x + 4$

Решение:

$$y' = (5x^2 + 3x + 4)' =$$

$$\begin{aligned} & [\text{Используем третье правило дифференцирования} \\ & (u \pm v)' = u' \pm v'] \\ & = (5x^2)' + (3x)' + 4' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\text{Для первого и второго слагаемого следуем применить} \\ & \text{четвертое правило дифференцирования} \\ & (const \cdot f(x))' = const \cdot f'(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\text{для третьего слагаемого используем правило} \\ & const' = 0, \text{ для первого и второго -табличную производную} \\ & (x^n)' = nx^{n-1}] \end{aligned}$$

$$= 5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 3 \cdot 1 \cdot x^{1-0} + 0 = 10 \cdot x + 3$$

Пример 3: Вычислить производную функции $y = 3x^{\frac{13}{7}} - 4x\sqrt{x} + \frac{7}{x^3}$

Решение:

$$y' = \left(3x^{\frac{13}{7}} - 4x\sqrt{x} + \frac{7}{x^3} \right)' = \left(3x^{\frac{13}{7}} - 4x^{1,5} + 7x^{-3} \right)' =$$

[Используем третье правило дифференцирования $(u \pm v)' = u' \pm v'$]

$$= \left(3x^{\frac{13}{7}} \right)' - \left(4x^{1,5} \right)' + \left(7x^{-3} \right)' =$$

[Применим четвертое правило дифференцирования $(const \cdot f(x))' = const \cdot f'(x)$]

$$= 3 \left(x^{\frac{13}{7}} \right)' - 4 \left(x^{1,5} \right)' + 7 \left(x^{-3} \right)' =$$

[Применим табличную производную $(x^n)' = nx^{n-1}$]

$$= 3 \cdot \frac{13}{7} x^{\frac{13}{7}-1} - 4 \cdot 1,5x^{1,5-1} + 7 \cdot x^{-3-1} = 3 \cdot \frac{13}{7} x^{\frac{6}{7}} - 4 \cdot 1,5x^{0,5} + 7 \cdot x^{-4} =$$

$$= \frac{39}{7} x^{\frac{6}{7}} - 6\sqrt{x} + \frac{7}{x^4}$$

Пример 4: Вычислить производную функции

$$y = x^2 \sin(x)$$

Решение:

$$y' = \left(x^2 \sin(x) \right)' =$$

[Используем формулу дифференцирования произведения $(uv)' = u'v + uv'$]

$$= x^2 \left(\sin(x) \right)' + \left(x^2 \right)' \sin(x) =$$

[Применим табличные производные $(x^n)' = nx^{n-1}$ и $\sin'(x) = \cos(x)$]

$$= x^2 \cos(x) + 2x \sin(x)$$

Пример 5: Вычислить производную функции

$$y = \frac{e^{x+14}}{x^2 + 2x}$$

Решение:

$$y' = \left(\frac{e^{x+14}}{x^2 + 2x} \right)' =$$

[Используем формулу дифференцирования частного]

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{(e^{x+14})'(x^2 + 2x) - (e^{x+14})(x^2 + 2x)'}{(x^2 + 2x)^2} =$$

[Все бы хорошо и по табличным производным. Кроме e^{x+14} . Вспомним свойства степеней $e^{x+14} = e^x e^{14}$ и вынесем константу за знак дифференциала.]

$$= \frac{(e^x e^{14})'(x^2 + 2x) - e^{x+14}(2x + 2)}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{e^{14}(e^x)'(x^2 + 2x) - e^{x+14}(2x + 2)}{(x^2 + 2x)^2} =$$

$$= \frac{e^{14}e^x(x^2 + 2x) - e^{x+14}(2x + 2)}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{e^{x+14}(x^2 + 2x) - e^{x+14}(2x + 2)}{(x^2 + 2x)^2} =$$

$$= \frac{e^{x+14}(x^2 + 2x - 2x - 2)}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{e^{x+14}(x^2 - 2)}{(x^2 + 2x)^2}$$

Пример 6. Найти производную функции:

$$y = (x^2 - 2x + 3)^5$$

Решение

Обозначим $y = u^5$, где $u = x^2 - 2x + 3$. Тогда, согласно правила вычисления производной сложной функции, получим

$$\begin{aligned} y' &= 5(x^2 - 2x + 3)^4 (x^2 - 2x + 3)' = 5(x^2 - 2x + 3)^4 (2x - 2) = \\ &= 5(x^2 - 2x + 3)^4 \cdot 2 \cdot (x - 1) = \\ &= 10(x^2 - 2x + 3)^4 (x - 1). \end{aligned}$$

Пример 7. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ при $x = 4$

Решение

$$y' = x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Ответ : } y'(4) = \frac{1}{4}.$$

Пример 8. Найти производную функции

$$f(x) = (5x - 3) \cdot 2^x$$

Найдите производные следующих функций:

1. $(x^3 - 4)'$ =

2. $\left(\frac{1}{x} + 2x\right)'$ =

3. $(5x^5 - \sqrt{x})'$ =

4. $\left(\frac{1}{2}x^2 + 4\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)'$ =

5. $\left((3x + 7) \cdot (7x^3 + 5x - 4)\right)'$ =

$$6. \left(\frac{4x^2 + 8}{5 - 2x^3} \right)' =$$

$$7. (x^5 + 1)' =$$

$$8. \left(-\frac{1}{x} - 3x \right)' =$$

$$9. (4x^4 + \sqrt{x})' =$$

$$10. \left(\frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{5}{x} \right)' =$$

$$11. ((5x - 4) \cdot (2x^4 - 7x + 1))' =$$

Практическое занятие 9. Исследование и построение графиков функций.

Цель: закрепить и проверить знания и умения по исследованию функций с помощью производной.

Схема исследование функции $y = f(x)$ и построения графика:

- 1) Находим область определения функции $y = f(x)$.
- 2) Исследуем функцию на четность, нечетность и периодичность (для тригонометрических функций).
- 3) Находим точки пересечения функции $y = f(x)$ с осями координат (если их можно найти).
- 4) Находим производную $f'(x)$ и критические точки.
- 5) Находим промежутки возрастания, убывания, точки экстремума, экстремумы функций.
- 6) Исследуем поведение функции на концах промежутков области определения (если можно исследовать).

7) Используя полученные результаты, строим график функции или его эскиз.

Пример 1. Исследовать функцию $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4$ и построить ее график.

Решение

1) Область определения: $D(f) = \mathbb{R}$.

$$2) f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^4 - (-x)^2 - 4 = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4 = f(x);$$

функция четная, ее график симметричен относительно оси ординат.

3) Точка пересечения с осью Oy:

$$x = 0; y = \frac{1}{2} \cdot 0^4 - 0^2 - 4; y = -4$$

Точки пересечения с осью Oy:

$$y = 0; \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4 = 0; x_{1,2} = 2$$

(решите уравнение самостоятельно).

Итак, имеем точки пересечения с осями координат: (0;-4), (2;0), (-2;0).

$$4) f'(x) = 2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 2x(x - 1)(x + 1);$$

критические точки $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$.

5) Составляем таблицу, в которой обозначаем промежутки возрастания, промежутки убывания и критические точки:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$f(x)$	$\searrow$	-4,5	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-4,5	$\nearrow$
Вывод	Функция убывает	min	Функция возрастает	max	Функция убывает	min	Функция возрастает

В таблице приведены также выводы об критические точки (являются ли они точками максимума или минимума).

6) Поскольку $D(f) = \mathbb{R}$, то нет концов области определения.

7) Строим график функции используя результаты исследования

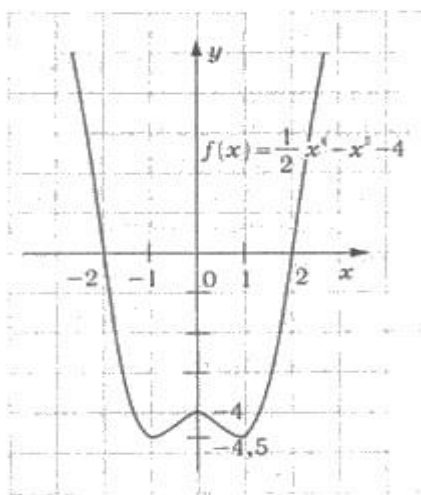


рис.1

Построение графика функций (или его эскиза) помогает при решении некоторых задач, связанных с нахождением корней уравнения (их количества, ближайших значений и т.п.).

Пример 2. Постройте график функции $y = x^3 - 3x + 3$, используя краткую схему построения. схему построения.

Решение:

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$

2) Функция не является ни четной, ни нечетной, т. к.
 $f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$

3) Асимптот нет

4) $f'(x) = 3x^2 - 3, f'(x) = 0$ при $x = 1, x = -1$.

$x = 1, x = -1$ – стационарные точки.

5) $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1), x \in (1; +\infty)$. Так как в точках $x = 1, x = -1$ функция непрерывна, то эти точки также включаются в промежутки возрастания.

$f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$. Так как в точках $x = 1, x = -1$ функция непрерывна, то эти точки также включаются в промежутки убывания.

6) Так как в точке $x = -1$ производная меняет знак с «+» на «-», то $x = -1$ – точка максимума.

Так как в точке $x = 1$ производная меняет знак с «-» на «+», то $x = 1$ – точка минимума.

7) Результаты исследования представим в виде таблицы.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		5		1	
		max		min	

8) Координаты некоторых точек:

x	-2	0	2
f(x)	1	3	5

9) По полученным данным строим график функции

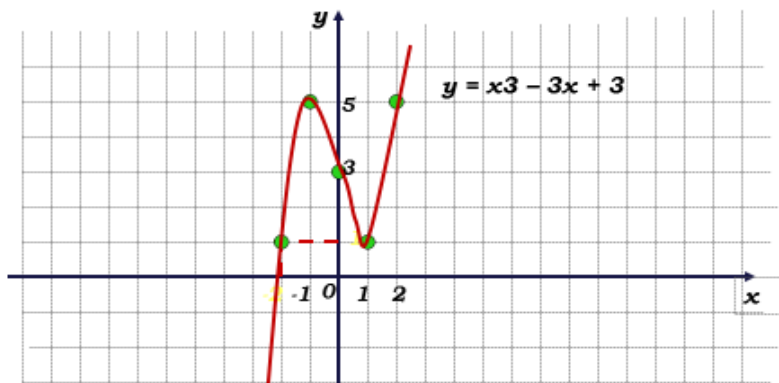


Рисунок 2 – график функции $y = x^3 - 3x + 3$

Пример 3. Постройте график функции $y = x + \frac{1}{x-1} - 3$, используя подробную схему построения. схему построения.

Решение:

1) $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2) Функция не является ни четной, ни нечетной, т. к.
 $f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$

3) $x = 1$ – вертикальная асимптота

4) $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$, $f'(x) = 0$ при $x = 2$, $x = 0$.

$x = 2$, $x = 0$ – стационарные точки.

5) $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$, $x \in (2; +\infty)$. Так как в точках $x = 0$, $x = 2$ функция непрерывна, то эти точки также включаются в промежутки возрастания.

$f'(x) < 0$ при $x \in (0; 1)$, $x \in (1; 2)$. Так как в точках $x = 0$, $x = 2$ функция непрерывна, то эти точки также включаются в промежутки убывания.

Так как в точке $x = 0$ производная меняет знак с «+» на «-», то $x = 0$ – точка максимума.

Так как в точке $x = 2$ производная меняет знак с «-» на «+», то $x = 2$ – точка минимума.

$x = 1$ – не является точкой экстремума

6) Найдем интервалы выпуклости функции.

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$f'' < 0$ при $x < 1$; при $x \in (-\infty; 1)$ функция выпукла вверх.

$f'' > 0$ при $x > 1$; при $x \in (1; +\infty)$ функция выпукла вниз.

7) Результаты исследования представим в виде таблицы.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	Не сущ.	-	0	+
$f''(x)$	-		-	Не сущ.	+		+
$f(x)$		-4		Не сущ.		0	
		max				min	

8) Координаты некоторых точек:

x	-1	0,5	1,5	3
f(x)	-4,5	-4,5	0,5	0,5

9) По полученным данным строим график (рис. 3)

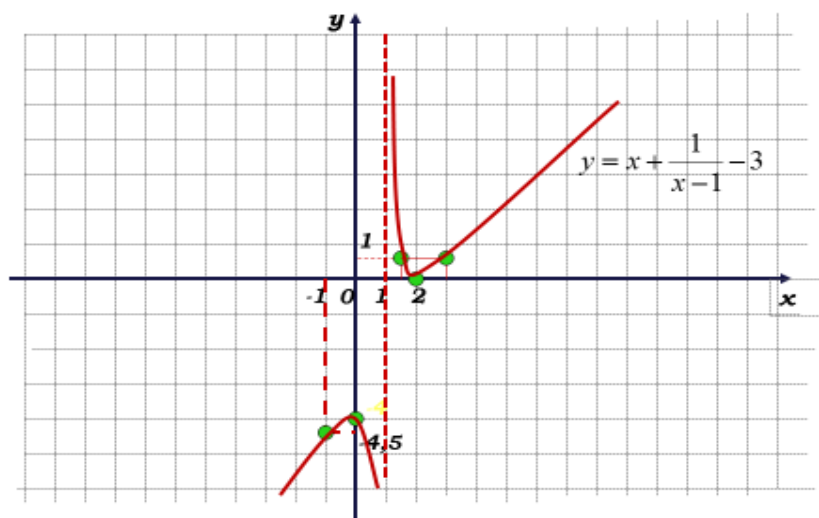


Рисунок 3 – график функции $y = x + \frac{1}{x-1} - 3$

Пример 4. Найти промежутки убывания и возрастания функции

$$y = \ln x + \frac{1}{x}.$$

Решение:

1) $D(y) = (0; +\infty)$

2) Найдем производную

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$

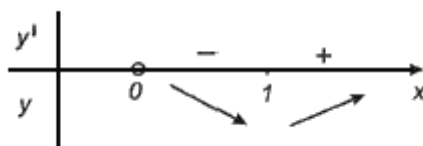
$$D(y') = (0; +\infty)$$

3) Найдем критические точки функции:

$$y' = 0;$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0;$$

$$\frac{x}{x} = 1$$



4)

(для определения знаков производной использовали метод интервалов)

Ответ: при $x \in (0;1]$ функция убывает, при $x \in [0;+\infty)$ функция возрастает.

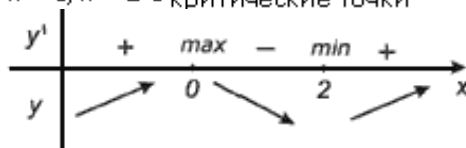
Пример 5. Исследовать функцию $f(x)=x^3-3x^2+4$ с помощью производной и построить ее график.

Решение:

1) $D(f) = \mathbb{R}$

2) $f'(x) = 3x^2 - 6x$,
 $D(f') = \mathbb{R}$

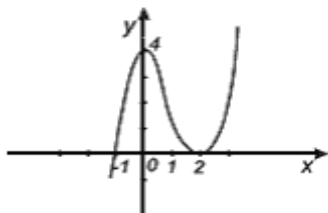
3) $f'(x) = 0$;
 $3x^2 - 6x = 0$,
 $x^2 - 2x = 0$
 $x = 0, x = 2$ - критические точки



4) $x=0$ – точка максимума, $x=2$ – точка минимума.

5) $f(0)=4$; $f(2)=0$

Используя результаты исследования, строим график функции : $f(x)=x^3-3x^2+4$



Пример 6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

Решение:

$$D(f) : x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

$$1) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{8};$$

$$f(2) = 9\frac{1}{2}$$

$$2) \quad f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2};$$

$$\frac{3x^4 - 3}{x^2} = 0,$$

$$3x^4 - 3 = 0$$

$$x_1 = 1; x_2 = -1$$

$$1 \in \left(\frac{1}{2}; 2\right);$$

$$-1 \notin \left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

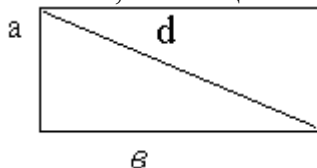
$$f(1) = 4$$

3) Из чисел $6\frac{1}{8}$, $9\frac{1}{2}$ и 4 наибольшее $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.

$$\max_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = 9\frac{1}{2}; \quad \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = 4;$$

Ответ:

Пример 7. Найти длины сторон прямоугольника с периметром 20см, имеющего наименьшую диагональ.



Решение:

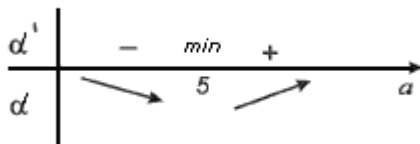
Пусть a и b длины сторон прямоугольника, d - его диагональ. Тогда $a+b=10$. По теореме Пифагора $d^2=a^2+b^2$. По условию задачи $a>0$, $b>0$. $b=10-a>0$, значит $0 < a < 10$. $d^2=a^2+(10-a)^2=2a^2-20a+100$, $0<a<10$.

Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения a , при котором функция $d(a)=2a^2-$

$20a+100$ принимает наименьшее значение на интервале $0 < a < 10$.

Найдем производную $d'(a)=4a-20$.

Критическая точка $a = 5 \in (0;10)$.



$a=5$ точка минимума. Следовательно, наименьшее значение функция $d(a)$ на интервале $(0;10)$ принимает в точке $a=5$. При этом $b=5$.

Ответ: 5см, 5см.

Дом/ зад

Задания для практической работы:

1. Из данных функций выбрать 2 функции, провести их исследование и построить графики

1. $y = 7 - 6x - x^2$;
2. $y = x^3 - 3x - 2$;
3. $y = x^4 - 2x^3 + 1$;
4. $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$;
5. $y = x^4 - 10x^2 + 9$.

Вопросы для самоконтроля.

1. Что называют производной функции?
2. Что такое - критическая точка функции?
3. Что называют экстремумом функции?
4. Признак максимума (минимума) функции.
5. Признак возрастания/убывания функции.
6. Применение второй производной.

Практическая работа № 10. Решение задач на вычисление интегралов.

Таблица основных интегралов, C – постоянная величина

$$1. \int 0 \cdot dx = C$$

$$2. \int dx = x + C$$

$$3. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n = \text{const}, \quad n \neq -1)$$

$$4. \int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C, \quad (n = \text{const}, \quad n \neq -1)$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$6. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, \quad a \neq 1)$$

$$8. \int e^x dx = e^x + C$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$10. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$11. \int ctg x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg x + C$$

$$13. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = - ctg x + C$$

$$14. \int \frac{dx}{1+x^2} = arctg x + C$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$16. \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

Пример 1: Вычислить интеграл

$$\int \sqrt{x} dx$$

По таблице интегралов находим:

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$$

$$\text{Ответ: } \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\text{По таблице интегралов находим } \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

Ответ: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

Пример 3. Вычислить интеграл: $\int 7x^5 dx$

Решение

Вынося постоянный множитель 7 за знак интеграла, по таблице интегралов находим:

$$\int 7x^5 dx = 7 \int x^5 dx = 7 \cdot \frac{x^6}{6} + C$$

Ответ

$$\int 7x^5 dx = 7 \cdot \frac{x^6}{6} + C$$

Пример 4. Вычислить интеграл:

$$\int (x^3 + 5x) dx$$

Решение

Интеграл суммы равен сумме интегралов, поэтому:

$$\int (x^3 + 5x) dx = \int (x^3) dx + \int (5x) dx = \frac{x^4}{4} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^4 + 10x^2}{4} + C$$

Ответ $\int (x^3 + 5x) dx = \frac{x^4 + 10x^2}{4} + C$

Пример 5. $\int (x^4 - x^2 + 4) dx$

Интеграл суммы равен сумме интегралов, поэтому:

$$\int (x^4 - x^2 + 4)dx = \int (x^4)dx - \int (x^2)dx + \int (4)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 4x + C$$

Ответ: $\int (x^4 - x^2 + 4)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 4x + C$

Пример 6. Вычислить интеграл: $\int \sqrt[n]{x}dx$

Преобразуя подынтегральную функцию к виду степенной, находим её интеграл по таблице интегралов:

$$\int \sqrt[n]{x}dx = \int x^{\frac{1}{n}}dx = \frac{x^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}} + C = \frac{n \cdot x^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} + C = \frac{n}{n+1}x\sqrt[n]{x} + C$$

Ответ: $\int \sqrt[n]{x}dx = \frac{n}{n+1}x\sqrt[n]{x} + C$

Пример 7.

Вычислить

интеграл

$$\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3} \right) dx$$

Решение: Интеграл суммы равен сумме интегралов, поэтому:

$$\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \left(\frac{3}{x^5} \right) dx - \int \left(\frac{2}{x^4} \right) dx + \int \left(\frac{1}{x^3} \right) dx$$

Далее найдём каждый интеграл суммы:

$$\int \left(\frac{3}{x^5} \right) dx = 3 \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^4} + C$$

$$\int \left(\frac{2}{x^4} \right) dx = 2 \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + C$$

$$\int \left(\frac{1}{x^3}\right) dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + C$$

Ответ:

$$\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3}\right) dx = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + C$$

Пример 8. Вычислить интеграл:

$$\int (\sin x + \cos x) dx$$

Решение

Интеграл суммы равен сумме интегралов, поэтому:

$$\int (\sin x + \cos x) dx = \int (\sin x) dx + \int (\cos x) dx$$

Далее, применяя таблицу интегралов, находим интегралы функций синус и косинус:

$$\int (\sin x) dx + \int (\cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$$

$$\text{Ответ: } \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$$

Задания для самостоятельной работы

Пример 1. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int x^5 dx$$

Пример2. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$$

Пример3. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \operatorname{ctg} x dx$$

Пример 4. Найти неопределенный интеграл $\int (1 + \sin x)^3 \cos x dx$

Пример 5. Найти неопределенный интеграл $\int x \sin x dx$

Пример 6. Найти неопределенный интеграл $\int \operatorname{tg}^3 2x dx$

Практическое занятие №11. Вычисление определенного интеграла. Вычисление площади плоских фигур.

Цель: Закрепить знания и умения по вычислению площади плоских фигур.

Основные свойства определенного интеграла.

1. $\int_a^a f(x) dx = 0$
2. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
3. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
4. $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$
5. $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$

Формула Ньютона – Лейбница.

Если функции непрерывная на $[a; b]$. Тогда, если:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Замена переменной в определенном интеграле.

Пусть $f(x)$ - непрерывная функция на отрезке $[a;b]$.
Тогда, если

1) функция $x=\varphi(t)$ - функция непрерывная, непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$;

2) Множество значений функции $x=\varphi(t)$ является отрезок $[a;b]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt.$$

Интегрирование по частям.

Пусть $u=u(x), v=v(x)$ – дифференцируемые функции на отрезке $[a;b]$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Формула $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$ называется формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пример 1. $\int_{-1}^3 x^3 dx$.

Решение: $\int_{-1}^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^3 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}.$

Пример 2. $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}.$

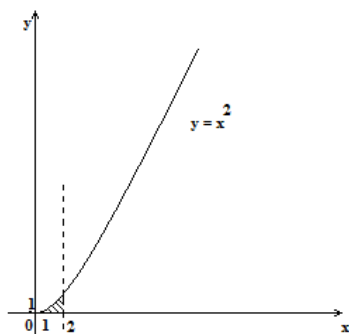
Решение: 1) Пусть $\sqrt{1+3x}=t$, отсюда $x=\frac{t^2-1}{3}$, $dx=\frac{2}{3}t dt$ и новые пределы интеграла: $t_1 = 1$, $t_2 = 4$ при $xx_2 = 5$.

Подставляя, получаем $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}} = \frac{2}{9} \int_1^4 (t^2 - 1) dt = \frac{2}{9} (\frac{t^3}{3} -$

t) $\Big|_1^4 =$

$$= \frac{2}{9} (\frac{64}{3} - 4 - (\frac{1}{3} - 1)) = \frac{2}{9} (21 - 3) = 4.$$

1. Вычислите площадь фигуры, изображенной на рисунке



1) $\frac{16}{3}$

2) 4

3) $\frac{8}{3}$

4) 8

Решение. Фигура ограничена графиком функции $y=x^2$ и осью абсцисс. Пределы интегрирования $x=0$, $x=2$. Тогда искомая площадь $S = \int_0^2 x^2 dx$.

По формуле Ньютона – Лейбница $\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2$, подставим пределы интегрирования

$$\frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

Значит, площадь $S = \frac{8}{3}$

Ответ: номер верного ответа 3.

2. Найдите площадь фигуры ограниченной линиями $y=-2x+5$, $x=1$, $x=2$ и осью Ox

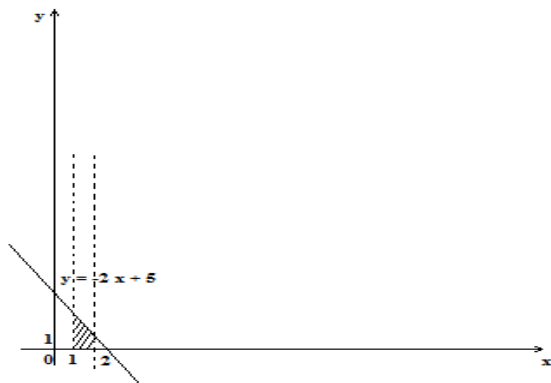
1)2

2)4

3) 6

4) $\frac{1}{2}$

Решение. Построим графики указанных линий. Получившуюся внутри область заштрихуем.



Очевидно, что пределы интегрирования $x=1$ и $x=2$, а область ограничена линией

$y=-2x+5$ и осью Ox , поэтому площадь найдем как $S=\int_1^2(-2x+5)dx$.

Найдем первообразную и по формуле Ньютона – Лейбница получим

$\int_1^2(-2x+5)dx = (-x^2+5x) \Big|_1^2 = (-4+10) - (-1+5) = 2$
т.е. $S=2$.

Ответ: номер верного ответа 1.

3 Найдите площадь фигуры ограниченная линиями $y=-3x^2+6x$ и $y=0$.

1)2

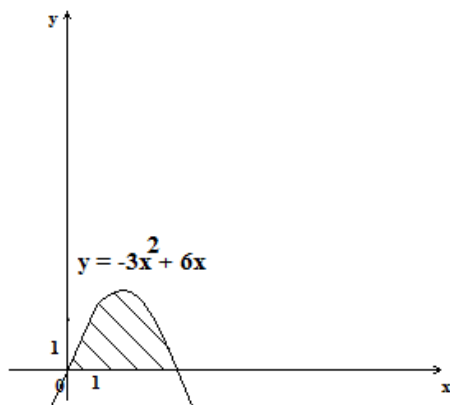
2)16

3) 4

4) 8

Решение. Найдём точки пересечения параболы $y=-3x^2+6x$ с осью Ox . Для этого решим уравнение $-3x^2+6x=0$, тогда $x=0$, $x=2$.

Построим эскиз графика функции $y = -3x^2 + 6x$,



тогда площадь фигуры: $S = \int_1^2 (-3x^2 + 6x) dx$. По формуле Ньютона – Лейбница имеем

$$\int_1^2 (-3x^2 + 6x) dx = (-x^3 + 3x^2) \Big|_1^2 = 4, \text{ т.е. } S=4.$$

Ответ: номер верного ответа 4.

4. Найдите площадь фигуры ограниченная линиями $y = (x - 3)^2$, $y = 0$, $x = 6$.

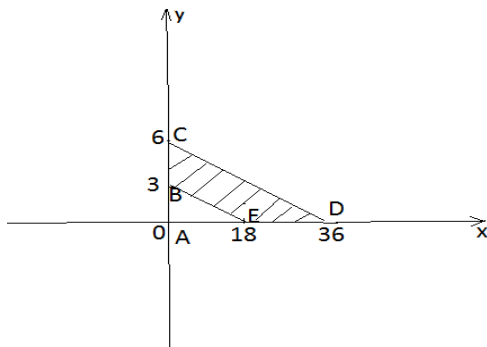
Решение. Параболы $y = (x - 3)^2$ касается оси абсцисс в точке $x=3$ – это и будет нижний предел интегрирования. Тогда

$$\begin{aligned} \text{площадь фигуры } S &= \int_3^6 (x - 3)^2 dx = \frac{(x-3)^3}{3} \Big|_3^6 = \\ &= \frac{(6-3)^3}{3} - \frac{(3-3)^3}{3} = 9. \end{aligned}$$

Ответ: 9

5. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного линиями $\frac{x}{3} + 2y = 12$, $\frac{x}{3} + 2y = 6$ и осями координат.

Решение. Для вычисления площади построим четырехугольник. Выразим y в обоих уравнениях: $y=6-\frac{x}{6}$, $y=3-\frac{x}{6}$ и построим графики прямых.



Чтобы найти искомую площадь S , найдем площади треугольников ACD и ABE , затем найдем $S = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle ABE}$. Площади треугольников можно найти несколькими способами: геометрическим и с применением интегралов.

1. Геометрический способ. Прямая $y=6-\frac{x}{6}$ пересекает ось Ox при $x=36$, а ось Oy - при

$x=6$. Таким образом, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 6 = 108$. Прямая $y=3-\frac{x}{6}$ пересекает ось Ox при $x=18$, а ось Oy - при $y=3$. Значит $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3 = 27$.

2. Применим определенный интеграл для вычисления обеих площадей

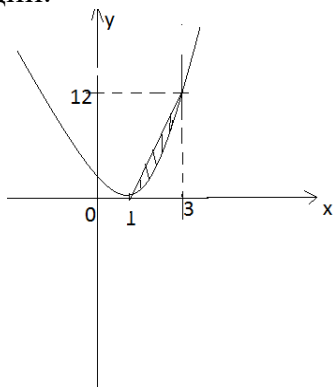
$$S_{\triangle ACD} = \int_0^{36} \left(6 - \frac{x}{6}\right) dx = \left(6x - \frac{x^2}{12}\right) \Big|_0^{36} = 216 - 108 = 108$$

$S_{\triangle ABE} = \int_0^{18} \left(3 - \frac{x}{6}\right) dx = \left(3x - \frac{x^2}{12}\right) \Big|_0^{18} = 54 - 27 = 27$. Таким образом, площадь четырехугольника $S = 108 - 27 = 81$.

Ответ: 81.

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$ и графиком ее производной $f'(x)$.

Решение. Найдем производную функции $f'(x) = 6x - 6$. Построим эскиз фигуры, ограниченной графиком данных функций.



Чтобы вычислить площадь, найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$ и $f'(x) = 6x - 6$. Решим уравнение $3x^2 - 6x + 3 = 6x - 6$,

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3.$$

Вычислим площадь: $S = \int_1^3 ((6x - 6) - (3x^2 - 6x + 3)) dx = \int_1^3 (-3x^2 + 12x - 9) dx =$

$$= (-x^3 + 3x^2 - 9x) \Big|_1^3 = (-27 + 54 - 27) - (-1 + 6 - 9) = 4/$$

Ответ: 4.

Задания для самостоятельной работы.

Пример 1

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2 dx$$

Пример 2

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^5 \frac{7dx}{x}$$

Пример 3

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx$$

Пример 4

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-3}^1 (2x^2 + 3x - 1) dx$$

Пример 5

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 1}$$

Пример 6

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$$

Пример 7

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$$

Выбрать правильный ответ

Пример 8. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $x=2$, $x=-1$ и осью Ox

- 1) 6 2) $3\frac{1}{3}$ 3) $2\frac{2}{3}$ 4) $8\frac{1}{3}$

Пример 9. Найдите площадь фигуры ограниченной линиями $y=2x^2-1$, $x=1$, $x=3$ $y=0$

- 1) $16\frac{2}{3}$ 2) $15\frac{1}{3}$ 3) $21\frac{2}{3}$ 4) $14\frac{1}{3}$

Пример 10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2^x$, $x=0$, $x=4$ и осью Ox

- 1) $\frac{16}{\ln 2}$ 2) $\frac{8}{\ln 2}$ 3) $16 \ln 2$ 4) $\frac{15}{\ln 2}$

Пример 11. Найдите площадь фигуры ограниченной линиями $y=0,5x^2-2x+3$, $y=7-x$

Пример 12. Найдите площадь фигуры ограниченной графиком функции $y=4-3x-x^2$, и прямой $y=-2x+2$

Пример 13. Найдите площадь фигуры ограниченной линиями $y=3\sqrt{x}$, $x=4$, $x=9$, $y=0$.

Пример 14. Найдите площадь фигуры ограниченной линиями $y=6x^2$, $y=6\sqrt{x}$.

Пример 15. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -6x^2 + 3x$, $y = -3$.

Пример 16. Фигура, ограниченная линиями $y = x + 2$, $x = 3$, $y = 0$, делится линией $y = x^2 - 2x + 2$ на две части. Найдите площадь наибольшей из частей.

Практическое занятие №12. Решение задач по разделу «Теория вероятностей и математической статистике»

Примеры непосредственного вычисления вероятностей

Пример 1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим через A событие — набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов: $P(A) = \frac{1}{10}$.

Пример 2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Обозначим через B событие — набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т.е. $A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = 9 \cdot 10 = 90$. Таким образом,

общее число возможных элементарных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию B лишь один исход. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов: $P(B) = \frac{1}{90}$.

Пример 3. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т. е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов ($C_{10}^6 = \frac{10!}{6!(10-6)!} = 210$).

Определим число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию A (среди шести взятых деталей 4 стандартных). Четыре стандартные детали можно взять из семи стандартных деталей $C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35$ способами; при этом остальные $6-4=2$ детали должны быть нестандартными; взять же 2 нестандартные детали из $10-7=3$ нестандартных деталей можно $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-1)!} = 3$ способами. Следовательно,

число благоприятствующих исходов равно $C_7^4 \cdot C_3^2 = 35 \cdot 3 = 105$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов: $P(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$.

Задания для самостоятельной работы

Задача №1. На столе лежат 20 пирожков — 5 с капустой, 7 с яблоками и 8 с рисом. Марина хочет взять пирожок. Какова вероятность, что она возьмет пирожок с рисом?

Задача 2. На тарелке 30 пирожков: 3 с мясом, 18 с капустой и 9 с вишней. Саша наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с вишней.

Задача 3. В каждой партии из 1000 лампочек в среднем 20 бракованных. Найдите вероятность того, что наугад взятая лампочка из партии будет исправной.

Задача4. Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся У. верно решит больше 9 задач, равна 0,67. Вероятность того, что У. верно решит больше 8 задач, равна 0,73. Найдите вероятность того, что У. верно решит ровно 9 задач.

Задача 5. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,15. Вопросов,

которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Задача 6. Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,29. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Литература

1. Башмаков, М.И. Математика [Электронный ресурс]: учебник / Башмаков М.И. - Москва: КноРус, 2019. - 394 с. - ЭБС «BOOK.RU» - Режим доступа: <https://book.ru/book/929528>
2. Дадаян, А.А. Математика [Электронный ресурс]: учебник / А.А. Дадаян. - М.: Форум, 2018. - 544 с. - ЭБС «Znaniyum.com» - Режим доступа: <http://znaniyum.com/catalog/product/967862>
3. Башмаков, М.И. Математика: учебник / М.И. Башмаков. – М.: Академия, 2015. – 256 с.
4. Башмаков, М.И. Математика. Задачник: учебное пособие / М.И. Башмаков. – М.: Академия, 2014. – 416 с.
5. Богомолов, Н. В. Математика [Электронный ресурс]: учебник / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. - Москва: Юрайт, 2019. - 401 с. - ЭБС «Юрайт» - Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/bcode/433286>
6. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике. Ч. 1 [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н. В. Богомолов. - Москва: Юрайт, 2019. - 326 с. - ЭБС «Юрайт» - Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/bcode/434366>