МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Майкопский государственный технологический университет» в поселке Яблоновском

Политехнический колледж

Методическое пособие для преподавателя по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

п. Яблоновский – 2018

УДК 519.2(07)
ББК 22.17
М-54

Автор:

Схаплок А.А. – преподаватель первой категории

Настоящее методическое пособие подготовлено по разделу «Случайные события» дисциплины ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах. Методическое пособие полностью соответствует требованиям государственного образовательного стандарта по дисциплине. Методическое пособие предназначено для специальностей среднего профессионального образования

Содержание

Пояснительная записка

Методическое пособие составлено в помощь преподавателя по разделу «Случайные величины» дисциплины ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика. Пособие предназначено для организации аудиторной и внеаудиторной работы студентов. Данное методическое пособие может быть использовано для специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах.

Материал пособия имеет определенную структуру: по каждой рассматриваемой теме дается теоретический материал с практическими примерами, после которого указан перечень практических заданий по теме

Введение

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений.

Под *случайными* понимаются такие явления, которые при многократном повторении опыта протекают каждый раз по-иному. Исход таких опытов непредсказуем.

Вероятность — количественная мера неопределенности — число, которое выражает степень уверенности в наступлении того или иного события.

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Теория вероятностей в настоящее время — обязательный *инструмент анализа ситуаций, включающих неопределенность.* Основной *задачей* теории вероятностей является установление математических законов для исследования случайных явлений массового характера и предвидения их на основании отдельных фактов.

Математическая статистика — математическая наука, изучающая методы обработки результатов наблюдений.

Задача математической статистики заключается в том, чтобы по выборке — подмножеству ограниченных данных — выявить с определенной степенью точности характеристики всего множества — генеральной совокупности.

Методы математической статистики основываются на тесно связанной с ней теорией вероятностей.

Тема 1. Элементы комбинаторики

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Опр. 1. Множество (совокупность элементов) называется *занумерованным,* если каждому элементу этого множества сопоставлено свое натуральное число (номер) от 1 до *n.* Для краткости занумерованные множества также будут называться *наборами*.

В случае, когда n является *конечным*, говорят, что множество состоит из *n* элементов. Если $n = \infty$, то множество называется *счетным*.

Опр. 2. Отличающиеся друг от друга порядком наборы, составленные из всех элементов данного конечного множества, называются *перестановками* этого множества. Например: множество, состоящее из трех элементов {1,2,3}, имеет следующие перестановки: (1,2,3), (1,3,2), (2,3,1), (2,1,3), (3,2,1), (3,1,2).

Число всех перестановок множества из *n* элементов обозначается P_n.

Теорема 1 (о числе перестановок). Число перестановок P_n определяется по формуле $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

Задача 1. Сколькими различными маршрутами можно разнести корреспонденцию в 5 адресов?

Решение. Занумеруем адреса цифрами от 1 до 5. Каждому маршруту можно сопоставить один из наборов, состоящих из этих пяти цифр, например, (2,5,3,4,1). Такой набор означает, что сначала выбирается второй адрес, затем пятый, третий, четвертый и первый. Всего различных маршрутов, т. е. отличающихся порядком наборов пяти цифр будет 5! = 120.

Задача 2. Цифры 0,1,2,3 написаны на четырех карточках. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из этих карточек?

Решение. Число различных комбинаций из четырех цифр равно 4!. Не все эти комбинации являются четырехзначными числами, т. к. есть комбинации, начинающиеся с нуля. Таких комбинаций будет 3! и их нужно исключить. В результате число различных четырехзначных чисел равно *4!-3! = 18.*

Опр. 3. Упорядоченные наборы, состоящие из k различных элементов, выбранных из данных n элементов, называются *размещениями из п элементов по k.*

Размещения могут отличаться друг от друга как элементами, так и порядком.

Например: Различными размещениями множества из трех элементов {1,2,3} по два будут наборы (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2).

Число всех размещений из n элементов по $к$ обозначается A_n^k. При $k = n$ число размещений совпадает с числом перестановок.

Теорема 2 (о числе размещений). Число размещении из п элементов по к определяется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Задача 3. Студентам надо сдать 4 экзамена за 8 дней. Сколькими способами можно составить расписание сдачи экзаменов?

Решение. Занумеруем дни сдачи экзаменов цифрами 1,2,...,8. Составлять различные расписания можно следующим образом. Сначала выберем дни для сдачи экзаменов, например, (2,4,5,7), а затем порядок сдачи экзаменов. Таким образом, нужно составить различные наборы четырех чисел из восьми, которые отличаются друг от друга не только элементами, но и порядком. Таких наборов $A_8^4 = 1680$.

Опр. 4. Неупорядоченные наборы, состоящие из k элементов, взятых из данных n элементов, называются *сочетаниями из п элементов по k.*

Сочетания отличаются друг от друга только элементами.

Например: Для множества {1,2,3} сочетаниями по 2 элемента являются {1,2}, {1,3}, {2,3}.

Число всех сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k.

Теорема 3 (о числе сочетаний). Число сочетаний из п элементов по k определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Задача 4. В хоккейном турнире участвуют 6 команд. Каждая команда должна сыграть с каждой одну игру. Сколько игр сыграно в турнире?

Решение. Различные пары команд образуют сочетания из 6 по 2, поскольку порядок среди двух команд, играющих в одной игре, нам безразличен. Следовательно, число игр будет равно $C_6^2 = 15$.

Теорема 4 (о числе комбинаций). Число различных комбинаций элементов вида $(a^1, a^2, \ldots, a^r)$, *где* a^i - некоторый элемент i-й группы, состоящей из n_i элементов, равно $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_r$.

Задача 5. Из трех классов спортивной школы нужно составить команду для соревнований, взяв по одному ученику от класса. Сколько различных команд можно составить, если в одном классе учатся 18, в другом - 20, а в третьем - 22 ученика?

Решение: *18·20·22 = 7920.*

Практические задания по теме

1.1. Имеется пять видов конвертов без марок и четыре вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

1.2. Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, из которых ровно 3 лежат на одной прямой?

1.3. Сколько словарей нужно издать, чтобы переводить с любого из 5 языков на любой другой из этих языков?

1.4. Есть пятиразрядный цифровой замок. Кодовое устройство замка состоит из пяти вращающихся дисков, каждый из которых имеет шесть цифр от 0 до 5. Только одна комбинация из пяти цифр позволяет открыть замок. Сколько таких комбинаций?

1.5. Сколькими способами можно упорядочить множество {1,2,..., 2n} так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

1.6. Сколькими способами можно упорядочить множество {1,2,..., n} так, чтобы числа 1,2,3 стояли рядом и в порядке возрастания?

1.7. Какое количество различных символов (букв, чисел и т. д.) можно передать не более чем пятью знаками кода Морзе, использующего точку (•) и тире (—)?

1.8. Автомобильные номера состоят из трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, если используются 32 буквы алфавита.

1.9.(сказка) Жил-был странный правитель. Решил он своих подданных различать не по именам, а по зубам. Себе все 32 зуба оставил как и были белыми. Ближайшим подданным повелел один зуб на разных позициях окрасить в черный цвет, чтобы их отличать. Далее шли вассалы с двумя черными зубами на разных позициях, и так далее. В самых низших слоях были люди с одним белым зубом на разных местах, и был один только с черными. Сколько было подданных у правителя?

1.10. Сколько машинных (различающихся по написанию и не обязательно имеющих смысл) слов можно составить из букв слова КОЛОКОЛ, из букв слова ВОДОРОД?

1.11. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом?

1.12. Сколькими способами 9 одинаковых конфет можно разложить по пяти различным пакетам, если ни один из пакетов не должен быть пустым? Тот же вопрос, но пакеты могут быть пустыми.

Тема 2. Основные понятия теории вероятностей

Вопрос 2.1 Случайные события

В основе теории вероятностей лежит понятие случайного эксперимента. Эксперимент считается случайным, если он может закончиться любым из совокупности известных результатов, но до осуществления эксперимента нельзя предсказать, каким именно.

Примеры случайного эксперимента: бросание монеты, бросание игральной кости, проведение лотереи, азартные игры, стрельба по цели, поступление звонков на телефонную станцию.

Различные результаты эксперимента принято называть *исходами*.

Опр.1. Множество всех взаимно исключающих исходов эксперимента называется *пространством элементарных событий*.

Взаимно исключающие исходы – это те, которые не могут наступить одновременно. В дальнейшем под термином «исход» подразумеваются только такие исходы.

Пространство элементарных событий мы будем обозначать буквой Ω, а его исходы – буквой ω с различными индексами и без них или другими понятными из контекста символами. Термины «элементарное событие» и «исход» будем считать синонимами.

Опр.2. Произвольное подмножество пространства элементарных событий называется *событием.*

Опр.3. *Достоверным* называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.

Например, если в сосуде содержится вода при нормальном атмосферном давлении и температуре 20°, то событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» есть достоверное. В этом примере заданные атмосферное давление и температура воды составляют совокупность условий.

Опр.4. *Невозможным* называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий.

Например, событие «вода в сосуде находится в твердом состоянии» заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий предыдущего примера.

Опр.5. *Случайным* называют событие, которое при осуществлении совокупности условий может либо произойти, либо не произойти.

Например, если брошена монета, то она может упасть так, что сверху будет либо герб, либо надпись. Поэтому событие «при бросании монеты выпал «герб» — случайное.

Каждое случайное событие, в частности выпадение «герба», есть следствие действия очень многих случайных причин (в нашем примере: сила, с которой брошена монета, форма монеты и многие другие). Невозможно учесть влияние на результат всех этих причин, поскольку число их очень велико и законы их действия неизвестны. Поэтому теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет единичное событие или нет, — она просто не в силах это сделать.

Событие может состоять из одного или нескольких элементарных событий, а также состоять из счетного или не счетного числа элементарных событий. События будут обозначаться заглавными латинскими или русскими буквами $A,B,C,..$ или записываться словами, например, «выпало четное число очков на игральной кости». Особо следует выделить событие, состоящее из пустого множества исходов. Оно будет обозначаться символом $\varnothing$.

Говорят, что *событие A наступило*, если эксперимент заканчивается одним из исходов, входящих в событие A.

Примеры: 1) Бросание монеты. Предполагаем, что монета достаточно тонкая и при бросании не встает на ребро. Пространство элементарных событий состоит из двух исходов: Г–«выпал герб», Р–«выпала решка», т. е. $\Omega=\{Г,Р\}$.

2) Бросание игральной кости, т. е. кубика, сделанного из однородного материала, грани которого занумерованы цифрами 1,2,3,4,5,6. Число очков, выпавшее при бросании игральной кости — цифра на верхней грани кубика. Пространство элементарных событий $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Событие Ч–«выпало четное число» состоит из трех исходов, т. е. $Ч=\{2,4,6\}$. Считаем, что Ч наступило, если выпало либо 2, либо 4, либо 6.

В зависимости от задачи в одном и том же эксперименте можно по-разному выбирать пространство элементарных событий. Так, при бросании игральной кости, если нас интересует лишь то, что выпало четное или нечетное число, можно считать Ω={Ч,Н}, где Ч={четное число}, Н={нечетное число}.

3) Пример пространства с несчетным числом элементарных событий. Пусть есть проволока длиной, например, 1 метр. Мы растягиваем ее за концы, в результате чего происходит разрыв в какой-то точке. Множество исходов - это все точки на проволоке, которые математически можно задать отрезком [0,1], т. е. U=[O,1], а каждому исходу *и* соответствует координата точки разрыва.

Опр.6. Суммой двух событий А и В (обозначается $A+B$) называется событие, состоящее из всех исходов, входящих либо в *А,* либо в *В*.

Другими словами, под $A+B$ понимают следующее событие: произошло или событие *А,* или событие *В,* либо они произошли одновременно, т. е. произошло хотя бы одно из событий *А* или *В*.

Опр.7. Произведением двух событий А и В (обозначается AB) называется событие, состоящее из тех исходов, которые входят как в *А,* так и в *В*.

Иными словами, AB означает событие, при котором события *А* и *В* наступают одновременно.

Опр.8. Разностью двух событий А и В (обозначается $A—B$) называется событие, состоящее из исходов, входящих в *А,* но не входящих в *В*.

Смысл события $A—B$ состоит в том, что событие *А* наступает, но при этом не наступает событие *В*.

Опр.9. Симметрической разностью двух событий А и В (обозначается $A\Delta B$) называется событие, состоящее из исходов, входящих в *А* или в *В,* но не входящих в *А* и *В* одновременно.

Смысл события $A\Delta B$ состоит в том, что события *А* и *В* наступают, но не одновременно.

Опр.10. Противоположным (дополнительным) для события А (обозначается $\bar{A}$) называется событие, состоящее из всех исходов, которые не входят в *А*.

Наступление события $\bar{A}$ означает просто, что событие *А* не наступило.

Примеры. Пусть при бросании игральной кости *А*-«выпало четное число», *В*-«выпало число кратное трем». Тогда: $A+B=\{2,4,6\}+\{3,6\}=\{2,3,4,6\}$,

$AB=\{2,4,6\}\{3,6\}=\{6\}$,

$A\text{-}B=\{2,4,6\}\text{-}\{3,6\}=\{2,4\}$,

$A\Delta B=\{2,3,4\}$,

$\bar{A}=\{1,3,5\}$.

Опр.11. События называют *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Примеры: 1) Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» — несовместные.

2) Брошена монета. Появление «герба» исключает появление надписи. События «появился герб» и «появилась надпись» — несовместные.

Опр.12. Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие. В частности, *если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.* Этот частный случай представляет для нас наибольший интерес, поскольку используется далее.

Пример. Стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно произойдет одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти два несовместных события образуют полную группу.

Опр.13. События называют *равновозможными*, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Например. Появление «герба» и появление надписи при бросании монеты — равновозможные события. Действительно, предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты.

Вопрос 2.2 Классическое определение вероятности

Вероятность—одно из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. Приведем определение, которое называют классическим.

Рассмотрим пример. Пусть в урне содержится 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них — красные, 3 — синие и 1—белый. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной (т.е. красный или синий) шар больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается, можно. Это число и называют вероятностью события (появления цветного шара).

Таким образом, *вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события.*

Поставим перед собой задачу дать количественную оценку возможности того, что взятый наудачу шар цветной. Появление цветного шара будем рассматривать в качестве события *А*. Каждый из возможных результатов испытания (испытание состоит в извлечении шара из урны) назовем *элементарным исходом (элементарным событием)*. Элементарные исходы обозначим через ω_1, ω_2, ω_3 и т. д. В нашем примере возможны следующие 6 элементарных исходов: ω_1— появился белый шар; ω_2, ω_3 — появился красный шар; ω_4, ω_5, ω_6 — появился синий шар. Легко видеть, что эти исходы образуют полную группу попарно несовместных событий (обязательно появится только один шар) и они равновозможны (шар вынимают наудачу, шары одинаковы и тщательно перемешаны).

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем *благоприятствующими этому событию*. В нашем примере благоприятствуют событию А (появлению цветного шара) следующие 5 исходов: ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6.

Таким образом, событие *А* наблюдается, если в испытании наступает один, безразлично какой, из элементарных исходов, благоприятствующих *А*; в нашем примере А наблюдается, если наступит ω_2, или ω_3, или ω_4, или ω_5, или ω_6. В этом смысле событие А подразделяется на несколько элементарных событий (ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6); элементарное же событие не подразделяется на другие события. В этом состоит различие между событием *А* и элементарным событием (элементарным исходом).

Отношение числа благоприятствующих событию *А* элементарных исходов к их общему числу называют вероятностью события *А* и обозначают через $P(A)$. В рассматриваемом примере всего элементарных исходов 6; из них 5 благоприятствуют событию *А*. Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна $P(A) = 5/6$. Это число и дает ту количественную оценку степени возможности появления цветного шара, которую мы хотели найти. Дадим теперь определение вероятности.

Опр.1. Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Итак, вероятность события A определяется формулой $P(A)=\frac{m}{n}$, где m — число элементарных исходов, благоприятствующих A; n — число всех возможных элементарных исходов испытания.

Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае $m=n$, следовательно, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1.$

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае $m=0$, следовательно, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0.$

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае $0<m<n$, значит, $0<\frac{m}{n}<1$, следовательно, $0<P(A)<1$

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству $0\le P(A)\le 1$.

Вопрос 2.3 Относительная частота. Устойчивость относительной частоты

Относительная частота наряду с вероятностью принадлежит к основным понятиям теории вероятностей.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний. Таким образом, относительная частота события А определяется формулой $W(A)=\frac{m}{n}$, где m — число появлений события, n — общее число испытаний.

Сопоставляя определения вероятности и относительной частоты, заключаем: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически. Другими словами, вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту—после опыта.

Пример 1. Отдел технического контроля обнаружил 3 нестандартных детали в партии из 80 случайно отобранных деталей. Относительная частота появления нестандартных деталей $W(A)=\dfrac{3}{80}$.

Пример 2. По цели произвели 24 выстрела, причем было зарегистрировано 19 попаданий. Относительная частота поражения цели $W(A)=\dfrac{19}{24}$.

Задачи непосредственного вычисления вероятностей

Задача 1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим через A событие — набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов: $P(A)=\dfrac{1}{10}$.

Задача 2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Обозначим через B событие — набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т.е. $A_{10}^{2}=\dfrac{10!}{(10-2)!}=9\cdot 10=90.$ Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию B лишь один исход. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов: $P(B)=\dfrac{1}{90}$.

Пример 3. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т. с. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов ($C_{10}^{6}=\dfrac{10!}{6!(10-6)!}=210$).

Определим число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию A (среди шести взятых деталей 4 стандартных). Четыре стандартные детали можно взять из семи стандартных деталей $C_7^4=\dfrac{7!}{4!(7-4)!}=35$ способами; при этом остальные 6-4=2 детали должны быть нестандартными; взять же 2 нестандартные детали из 10-7=3 нестандартных деталей можно $C_3^2=\dfrac{3!}{2!(3-1)!}=3$ способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно

$C_7^4 \cdot C_3^2 = 35 \cdot 3 = 105.$

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}.$$

Практические задания по теме

2.1. В ящике 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

2.2. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число.

2.3. Участник жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

2.4. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в квадрат пропорциональна площади квадрата и не зависит от расположения относительно круга.

2.5. Внутрь квадрата со стороной *a* наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в квадрат круга. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от расположения относительно квадрата.

2.6. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

2.7. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди 5 взятых наудачу кинескопов окажутся 3 кинескопа Львовского завода.

2.8. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

2.9. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления нестандартных деталей?

2.10. По цели произведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

2.11. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

2.12. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

2.13. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых равны 5 и 10 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная на удачу в большой круг, попадет так же и в кольцо, образованное этими окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения.

Тема 3. Сложение вероятностей

Вопрос 3.1 Сложение вероятностей независимых событий

Суммой A+B двух событий A и *B* называют событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий.

Например, если из орудия произведены два выстрела и *A*—попадание при первом выстреле, *B*—попадание при втором выстреле, то *A+B* — попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

В частности, если два события *A* и *B* — несовместные, то *A+B* — событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Например, событие A+B+C состоит в появлении одного из следующих событий: *A, B, C, A* и *B, A* и *C, B* и *C, A* и *B* и *C*.

Пусть события A и B—несовместные, причем вероятности этих событий известны. Как найти вероятность того, что наступит либо событие A, либо событие B? Ответ на этот вопрос дает теорема сложения.

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Доказательство. Введем обозначения: n—общее число возможных элементарных исходов испытания; m_1 — число исходов, благоприятствующих .событию *A*; m_2,— число исходов, благоприятствующих событию *B*.

Число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению либо события *A*, либо события *B*, равно m_1+m_2. Следовательно, $P(A+B)=\dfrac{m_1+m_2}{n}=\dfrac{m_1}{n}+\dfrac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$.

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий: $P(A_1+A_2+...+A_k)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_k)$.

Задача 1. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие *A*) $P(A)=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$.

Вероятность появления синего шара (событие *B*) $P(B)=\dfrac{5}{30}=\dfrac{1}{6}$.

События *A* и *B* несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность $P(A+B)=P(A)+P(B)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$.

Задача 2. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую — 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

Решение. События *A*—«стрелок попал в первую область» и *B*—«стрелок попал во вторую область» — несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность $P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}45+0{,}35=0{,}80$.

Вопрос 3.2 Полная группа событий

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

Теорема. Сумма вероятностей событий A_1, A_2, …, A_k, образующих полную группу, равна единице: $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_k)=1.$

Доказательство. Так как появление одного из событий полной группы достоверно, а вероятность достоверного события равна единице, то

$$P(A_1+A_2+...+A_k)=1. \tag{3.1}$$

Любые два события полной группы несовместны, поэтому можно применить теорему сложения:

$$P(A_1+A_2+...+A_k)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_k). \tag{3.2}$$

Сравнивая (3.1) и (3.2), получим $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_k)=1.$

Задача 1. Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов *A, B* и *C*. Вероятность получения пакета из города *A* равна 0,7, из города *B* —0,2. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города *C*.

Решение. События «пакет получен из города *A*», «пакет получен из города *B*», «пакет получен из города *C*» образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице: $0{,}7+0{,}2+P(C)=1.$ Отсюда искомая вероятность $P(C)=1-0{,}9=0{,}1.$

Вопрос 3.3 Противоположные события

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через *A*, то другое принято обозначать $\bar{A}$.

Пример 1. Попадание и промах при выстреле по цели — противоположные события. Если *A* — попадание, то $\bar{A}$ — промах.

Пример 2. Из ящика наудачу взята деталь. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» — противоположные.

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A)+P(\overline{A})=1.$

Доказательство. Противоположные события образуют полную группу, а сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице (*см. 3.2*).

Замечание 1. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через *p*, то вероятность другого события обозначают через *q*. Таким образом, в силу предыдущей теоремы $p+q=1$.

Задача 1. Вероятность того, что день будет дождливым, p=0,7. Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение. События «день дождливый» и «день ясный» — противоположные, поэтому искомая вероятность $q=1-p$ = 1-0,7=0,3.

Замечание 2. При решении задач на отыскание вероятности события *A* часто выгодно сначала вычислить вероятность события $\bar{A}$, а затем найти искомую вероятность по формуле

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

Задача 2. В ящике имеется n деталей, из которых m стандартных. Найти вероятность того, что среди k наудачу извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная.

Решение. События «среди извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная» и «среди извлеченных деталей нет ни одной стандартной» — противоположные. Обозначим первое событие через А, а второе—через $\bar{A}$.

Очевидно, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Найдем $P(\bar{A})$. Общее число способов, которыми можно извлечь k деталей из n деталей, равно C_n^k. Число нестандартных деталей равно n-m; из этого числа деталей можно C_{n-m}^k способами извлечь k нестандартных деталей. Поэтому вероятность того, что среди извлеченных k деталей нет ни одной стандартной, равна $P(\bar{A}) = \dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$. Искомая вероятность $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$.

Вопрос 3.4 Теорема сложения вероятностей совместных событий

Была рассмотрена теорема сложения для несовместных событий. Здесь будет изложена теорема сложения для совместных событий.

Два события называют *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Пример 1. A — появление четырех очков при бросании игральной кости; B — появление четного числа очков. События A и B — совместные.

Пусть события A и B совместны, причем даны вероятности этих событий и вероятность их совместного появления. Как найти вероятность события $A+B$, состоящего в том, что появится хотя бы одно из событий A и B? Ответ на этот вопрос дает теорема сложения вероятностей совместных событий.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Доказательство. Поскольку события A и B, по условию, совместны, то событие $A+B$ наступит, если наступит одно из следующих трех несовместных событий: $A\bar{B}, \bar{A}B$ или AB. По теореме сложения вероятностей несовместных событий,

$$P(A+B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB). \qquad (3.3)$$

Событие A произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий: $A\bar{B}$ или AB. По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем

$$P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB).$$

Отсюда

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB). \qquad (3.4)$$

Аналогично имеем

$$P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB).$$

Отсюда

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB). \qquad (3.5)$$

Подставив (3.4) и (3.5) в (3.3), окончательно получим

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \quad (3.6)$$

Замечание 1. При использовании полученной формулы следует иметь в виду, что события *A* и *B* могут быть как независимыми, так и зависимыми.

Для независимых событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B).$$

Для зависимых событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P_A(B).$$

Замечание 2. Если события *A* и *B* несовместны, то их совмещение есть невозможное событие и, следовательно, $P(AB)=0$. Формула (3.6) для несовместных событий принимает вид $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Мы вновь получили теорему сложения для несовместных событий. Таким образом, формула (3.6) справедлива как для совместных, так и для несовместных событий.

Задача 1. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: P_1 = 0,7; P_2 = 0,8. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из другого орудия, поэтому события *A* (попадание первого орудия) и *B* (попадание второго орудия) независимы.

Вероятность события *AB* (оба орудия дали попадание) – $P(AB)=P(A)P(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56.$

Искомая вероятность – $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}7+0{,}8-0{,}56=0{,}94.$

Тема 4. Умножение вероятностей

Вопрос 4.1 Произведение событий. Условная вероятность

Произведением двух событий *A* и *B* называют событие *AB*, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий.

Например, если *A*—деталь годная, *B*—деталь окрашенная, то *AB* — деталь годна и окрашена.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Например, если *A, B, C* — появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то *ABC* — выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

Случайное событие определено как событие, которое при осуществлении совокупности условий *S* может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий *S*, не налагается, то такую вероятность называют *безусловной*; если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют *условной*.

Например, часто вычисляют вероятность события *B* при дополнительном условии, что произошло событие *A*.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события *B*, вычисленную в предположении, что событие *A* уже наступило.

Задача 1. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение. После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность

$$P_A(B)=\frac{3}{5}\cdot$$

Этот же результат можно получить по формуле

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (P(A)>0). \tag{4.1}$$

Действительно, вероятность появления белого шара при первом испытании $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$

Найдем вероятность *P(AB)* того, что в первом испытании появится черный шар, а во втором — белый. Общее число исходов — совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу размещений $A_6^2=\frac{6!}{(6-2)!}=5\cdot 6=30.$ Из этого числа исходов событию *AB* благоприятствуют 3·3=9 исходов. Следовательно, *P(AB)* = 9/30 = 3/10.

Искомая условная вероятность

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3/10}{1/2}=\frac{3}{5}.$$

Как видим, получен прежний результат.

Исходя из классического определения вероятности, формулу (4.1) можно доказать. Это обстоятельство и служит основанием для следующего общего (применимого не только для классической вероятности) определения.

Условная вероятность события *B* при условии, что событие *A* уже наступило, по определению, равна

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (P(A)>0).$$

Вопрос 4.2 Теорема умножения вероятностей

Рассмотрим два события: *A* и *B*; пусть вероятности $P(A)$ и $P_A(B)$ известны. Как найти вероятность совмещения этих событий, т. е. вероятность того, что появится и событие *A* и событие *B*? Ответ на этот вопрос дает теорема умножения.

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило: $P(AB)=P(A)P_A(B).$

Доказательство. По определению условной вероятности, $P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$

Отсюда

$$P(AB)=P(A)P_A(B). \tag{4.2}$$

Замечание. Применив формулу (4.2) к событию *BA*, получим $P(BA)=P(B)P_B(A),$ или, поскольку событие *BA* не отличается от события *AB*,

$$P(AB)=P(B)P_B(A), \tag{4.3}$$

Сравнивая формулы (4.2) и (4.3), заключаем о справедливости равенства

$$P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A) \qquad (4.4)$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1A_2A_3...A_k)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)...P_{A_1A_2..A_{k-1}}(A_k),$$

где $P_{A_1A_2..A_{k-1}}(A_k)$ — вероятность события A_k, вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, ..., A_{k-1}$ наступили. В частности, для трех событий $P(ABC)=P(A)P_A(B)P_{AB}(C)$.

Заметим, что порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, т. е. безразлично какое событие считать первым, вторым и т. д.

Задача 1. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков — конусный, а второй — эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый валик окажется конусным (событие *A*), $P(A)=3/10.$

Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие В), вычисленная в предположении, что первый валик —. конусный, т. е. условная вероятность $P_A(B)=7/9.$

По теореме умножения, искомая вероятность $P(AB)=P(A)P_A(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$.

Задача 2. В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие *A*), при втором — черный (событие *B*) и при третьем—синий (событие *C*).

Решение. Вероятность появления белого шара в первом испытании $P(A)=5/12.$

Вероятность появления черного шара во втором испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, т. е. условная вероятность $P_A(B)=4/11.$

Вероятность появления синего шара в третьем испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, а во втором — черный, т. е. условная вероятность $P_{AB}(C)=3/10.$

Искомая вероятность $P(ABC)=P(A)P_A(B)P_{AB}(C)=(5/12)\cdot(4/11)\cdot(3/10)=1/22.$

Вопрос 4.3 Независимые события. Теорема умножения для независимых событий

Пусть вероятность события *B* не зависит от появления события *A*.

Событие B называют независимым от события A, если появление события *A* не изменяет вероятности события *B*, т. е. если условная вероятность события *B* равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B) \tag{4.5}$$

Подставив (4.5) в соотношение (4.4), получим $P(A)P(B) = P(B)P_B(A)$. Отсюда $P_B(A) = P(A)$, т. е. условная вероятность события *A* в предположении, что наступило событие *B*, равна его безусловной вероятности. Другими словами, событие *A* не зависит от события *B*.

Итак, если событие *B* не зависит от события *A*, то и событие *A* не зависит от события *B*; это означает, что *свойство независимости событий взаимно*.

Для независимых событий теорема умножения $P(AB) = P(A)P_A(B)$ имеет вид

$$P(AB) = P(A)P(B), \tag{4.6}$$

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Равенство (4.6) принимают в качестве определения независимых событий.

Два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют *зависимыми*.

На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

Задача 1. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие *A*) равна 0,8, а вторым (событие *B*) — 0,7.

Решение. События *A* и *B* независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$$

Замечание 1. Если события *A* и *B* независимы, то независимы также события *A* и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и *B*, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Несколько событий называют попарно независимыми, если каждые два из них независимы. Например, события *A*, *B*, *C* попарно независимы, если независимы события *A* и *B*, *A* и *C*, *B* и *C*.

Для того чтобы обобщить теорему умножения на несколько событий, введем понятие независимости событий в совокупности.

Несколько событий называют независимыми в совокупности (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных. Например, если события *A*, *B*, *C* независимы в совокупности, то независимы события *A* и *B*; *A* и *C*; *B* и *C*; *A* и *BC*; *B* и *AC*; *C* и *AB*.

Приведем теперь следствие из теоремы умножения.

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2...A_k) = P(A_1)P(A_2)...(A_k).$$

Доказательство. Рассмотрим три события: *A*, *B* и *C*. Совмещение событий *A*, *B* и *C* равносильно совмещению событий *AB* и *C*, поэтому $P(ABC) = P(AB \cdot C)$.

Так как события A, B и C независимы в совокупности, то независимы, в частности, события AB и C, а также A и B. По теореме умножения для двух независимых событий имеем: $P(AB\cdot C)=P(AB)P(C)$ и $P(AB)=P(A)P(B)$.

Итак, окончательно получим $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

Для произвольного n доказательство проводится методом математической индукции.

Замечание. Если события $A_1, A_2, ..., A_k$ независимы в совокупности, то и противоположные им события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_k}$ также независимы в совокупности.

Задача 2. Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Решение. Вероятность появления герба первой монеты (событие A) $P(A)=1/2$.

Вероятность появления герба второй монеты (событие B)

События A и B независимые, поэтому искомая вероятность по теореме умножения равна

$P(A)P(B)=(1/2)\cdot(1/2)=1/4$.

Задача 3. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение.

Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A), $P(A)=8/10=0{,}8$.

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B), $P(B)=7/10=0{,}7$.

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C), $P(C)=9/10=0{,}9$.

Так как события A, B и C независимые в совокупности, то искомая вероятность (по теореме умножения) равна $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}504$.

Приведем пример совместного применения теорем сложения и умножения.

Задача 4. Вероятности появления каждого из трех независимых событий A_1, A_2, A_3 соответственно равны p_1, p_2, p_3. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

Решение. Заметим, что, например, появление только первого события A_1 равносильно появлению события $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ (появилось первое и не появились второе и третье события). Введем обозначения:

B_1 — появилось только событие A_1, т. е. $B_1 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$;

B_2 — появилось только событие A_2, т. е. $B_2 = \overline{A_1}A_2\overline{A_3}$;

B_3 — появилось только событие A_3, т. е. $B_3 = \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

Таким образом, чтобы найти вероятность появления только одного из событий A_1, A_2, A_3, будем искать вероятность $P(B_1 + B_2 + B_3)$ появления одного, безразлично какого из событий B_1, B_2, B_3..

Так как события B_1, B_2, B_3 несовместны, то применима теорема сложения

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3). \quad (4.6)$$

Остается найти вероятности каждого из событий B_1, B_2, B_3.

События A_1, A_2, A_3 независимы, следовательно, независимы события $A_1, \overline{A_2}, \overline{A_3}$, поэтому к ним применима теорема умножения $P(B_1) = P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = p_1 q_2 q_3$.

Аналогично, $P(B_2) = P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) = q_1 p_2 q_3$;

$$P(B_3) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) = q_1 q_2 p_3.$$

Подставив эти вероятности в (1), найдем искомую вероятность появления только одного из событий A_1, A_2, A_3: $P(B_1 + B_2 + B_3) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3$.

Вопрос 4.4 Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть в результате испытания могут появиться *n* событий, независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем вероятности появления каждого из событий известны. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n. \quad (4.7)$$

Доказательство. Обозначим через *A* событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$. События *A* и $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$ (ни одно из событий не наступило) противоположны, следовательно, сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}...\overline{A_n}) = 1.$$

Отсюда, пользуясь теоремой умножения, получим

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}...\overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})...P(\overline{A_n}),\text{ или } P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n.$$

Частный случай. Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную *p*, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (4.8)$$

Задача 1. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие *A*) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2, A_3 (т.е. вероятности промахов), соответственно равны: $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$; $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Искомая вероятность $P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994.$

Задача 2. В типографии имеется 4 плоскопечатных машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие *А*).

Решение. События «машина работает» и «машина не работает» (в данный момент) — противоположные, поэтому сумма их вероятностей равна единице: $p + q = 1.$

Отсюда вероятность того, что машина в данный момент не работает, равна $q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$

Искомая вероятность $P(A) = 1 - q^4 = 1 - 0{,}1^4 = 0{,}9999.$.

Задача 3. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он попал в цель хотя бы один раз?

Решение. Обозначим через *А* событие «при *n* выстрелах стрелок попадает в цель хотя бы един раз». События, состоящие в попадании в цель при первом, втором выстрелах и т. д., независимы в совокупности, поэтому применима формула (4.8) $P(A) = 1 - q^n$.

Приняв во внимание, что, по условию, $P(A) \ge 0{,}9, p = 0{,}4$ (следовательно, $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$), получим $1 - 0{,}6^n \ge 0{,}9;$ отсюда $0{,}6^n \le 0{,}1.$

Прологарифмируем это неравенство по основанию 10: $n \lg 0{,}6 \le \lg 0{,}1.$

Отсюда, учитывая, что $\lg 0{,}6 < 0,$ имеем $n \ge \lg 0{,}1 / \le \lg 0{,}6 = -1/1{,}7782 = -1/(-0{,}2218) = 4{,}5.$

Итак, $n \ge 5,$ т.е. стрелок должен произвести не менее 5 выстрелов.

Задача 4. Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в трех независимых в совокупности испытаниях, равна 0,936. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что во всех испытаниях вероятность появления события одна и та же).

Решение. Так как рассматриваемые события независимы в совокупности, то применима формула (4.8) $P(A) = 1 - q^n$.

По условию, $P(A) = 0{,}936; n = 3.$ Следовательно, $0{,}936 = 1 - q^3,$ или $q^3 = 1 - 0{,}936 = 0{,}064.$ Отсюда $q = \sqrt[3]{0{,}064} = 0{,}4.$

Искомая вероятность $p = 1 - q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$

Практические задания по теме (по 3 и 4 темам)

3.4.1. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна *р*=0,9. Стрелок произвел 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание.

3.4.2. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: «появился «герб», «появилось 6 очков».

3.4.3. В двух ящиках находятся детали: в первом—10 (из них 3 стандартных), во втором—15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

3.4.4. В студии телевидения 3 телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна р=0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера (событие А).

3.4.5. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей (событие А)?

3.4.6. Предприятие изготовляет 95% изделий стандартных, причем из них 86% — первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта.

3.4.7. Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятности следующих событий: а) опыт окончится до шестого бросания; б) потребуется четное число бросаний.

3.4.8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех — вторая цифра. Предполагается, что все 20 возможных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) в первый раз; б) во второй раз; в) в оба раза.

3.4.9. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

3.4.10. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет.

3.4.11. Вероятность того, что событие A появится хотя бы один раз при двух независимых испытаниях, равна 0,75. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что вероятность появления события в обоих испытаниях одна и та же).

3.4.12. Три команды A_1, A_2, A_3 спортивного общества A состязаются соответственно с тремя командами общества B. Вероятности того, что команды общества A выиграют матчи у команд общества B, таковы: при встрече A_1 с B_1 — 0,8; A_2 с B_2 — 0,4; A_3 с B_3 — 0,4. Для победы необходимо выиграть не менее двух матчей из трех (ничьи во внимание не принимаются). Победа какого из обществ вероятнее?

3.4.13. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым стрелком— 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

3.4.14. Из последовательности чисел 1, 2, ..., n наудачу одно за другим выбираются два числа. Найти вероятность того, что одно из них меньше целого положительного числа k, а другое больше k, где $1 < k < n$.

3.4.15. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что: а) из трех проверенных изделий только одно окажется нестандартным; б) нестандартным окажется только четвертое по порядку проверенное изделие.

3.4.16. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7, а вторым—. 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

3.4.17. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом № 1, и 4 детали завода № 2. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом № 1.

3.4.18. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника — 0,9, для велосипедиста — 0,8 и для бегуна — 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

3.4.19. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом № 1, и 2 коробки деталей, изготовленных заводом N° 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,8, а завода № 2 — 0,9. Сборщик наудачу извлек деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.

3.4.20. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором — 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем—10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика—стандартная.

3.4.21. В телевизионном ателье имеется 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

3.4.22. В двух ящиках имеются радиолампы. В первом ящике содержится 12 ламп, из них 1 нестандартная; во втором 10 ламп, из них 1 нестандартная. Из первого ящика наудачу взята лампа и переложена во второй. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная из второго ящика лампа будет нестандартной.

3.4.23. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую извлеченную наудачу кость можно приставить к первой.

3.4.24. Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет будет для него наименьшей: когда он берет билет первым или последним?

3.4.24. В ящик, содержащий 3 одинаковых детали, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находящихся в ящике.

3.4.25. При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор С-1 с вероятностью 0,8, а сигнализатор С-11 срабатывает с вероятностью 1. Вероятности того, что автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-11, соответственно равны 0,6 и 0,4. Получен сигнал о разделке автомата. Что вероятнее: автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-11?

3.4.26. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса 4, из второй — 6, из третьей группы — 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадает в сборную института, соответственно равны 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент?

3.4.27. Вероятность для изделий некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0,96. Предлагается упрощенная система проверки на стандартность, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, которые не удовлетворяют стандарту,— с вероятностью 0,05. Найти вероятность того, что изделие, признанное при проверке стандартным, действительно удовлетворяет стандарту.

Тема 5. Следствия теорем сложения и умножения вероятностей

Вопрос 5.1 Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A),..., P_{B_n}(A)$ события *A*. Как найти вероятность события *A*? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Вероятность события *A*, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2,..., B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события *A*: $P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A).$

Эту формулу называют «формулой полной вероятности».

Доказательство. По условию, событие *A* может наступить, если наступит одно из несовместных событий $B_1, B_2,..., B_n$. Другими словами, появление события *A* означает осуществление одного, безразлично какого, из несовместных событий $B_1A, B_2A,..., B_nA$. Пользуясь для вычисления вероятности события *A* теоремой сложения, получим

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + ... + P(B_nA). \tag{5.1}$$

Остается вычислить каждое из слагаемых. По теореме умножения вероятностей зависимых событий имеем $P(B_1A) = P(B_1)P_{B_1}(A);$ $P(B_2A) = P(B_2)P_{B_2}(A); ...;$ $P(B_nA) = P(B_n)P_{B_n}(A).$

Подставив правые части этих равенств в соотношение (5.1), получим формулу полной вероятности

Задача 1. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго — 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) — стандартная.

Решение. Обозначим через *A* событие «извлеченная деталь стандартна».

Деталь может быть извлечена либо из первого набора (событие B_1), либо из второго (событие B_2).

Вероятность того, что деталь вынута из первого набора, $P(B_1) = 1/2.$

Вероятность того, что деталь вынута из второго набора, $P(B_2) = 1/2.$

Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_1}(A) = 0{,}8.$

Условная вероятность того, что из второго набора будет извлечена стандартная деталь, $P_{B_2}(A) = 0{,}9.$

Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь — стандартная, по формуле полной вероятности равна $P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}85.$

Задача 2. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке—10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

Решение. Обозначим через *A* событие «из первой коробки извлечена стандартная лампа».

Из второй коробки могла быть извлечена либо стандартная лампа (событие B_1), либо нестандартная (событие B_2).

Вероятность того, что из второй коробки извлечена стандартная лампа, $P(B_1)=9/10.$

Вероятность того, что из второй коробки извлечена нестандартная лампа, $P(B_2)=1/10.$

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная лампа, при условии, что из второй коробки в первую была переложена стандартная лампа, равна $P_{B_1}(A)=19/21.$

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная лампа, при условии, что из второй коробки в первую была переложена нестандартная лампа, равна $P_{B_2}(A)=18/21.$

Искомая вероятность того, что из первой коробки будет извлечена стандартная лампа, по формуле полной вероятности равна $P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=(9/10)\cdot(19/21)+(1/10)\cdot(18/21)=0{,}9.$

Вопрос 5.2 Вероятность гипотез. Формулы Байеса

Пусть событие *A* может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу. Поскольку заранее не известно, какое из этих событий наступит, их называют *гипотезами*. Вероятность появления события *A* определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\dots+P(B_n)P_{B_n}(A). \qquad (5.2)$$

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие *A*. Поставим своей задачей определить, как изменились (в связи с тем, что событие *A* уже наступило) вероятности гипотез. Другими словами, будем искать условные вероятности

$$P_A(B_1),\ P_A(B_2),\ \dots,\ P_A(B_n).$$

Найдем сначала условную вероятность $P_A(B_1)$. По теореме умножения имеем

$P(AB_1)=P(A)P_A(B_1)=P(B_1)P_{B_1}(A).$ Отсюда $P_A(B_1)=\dfrac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$ Заменив здесь *P(A)* по формуле (5.2), получим

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\dots+P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Аналогично выводятся формулы, определяющие условные вероятности остальных гипотез, т. е. условная вероятность любой гипотезы $B_i\ (i=1,2,\dots,n)$ может быть вычислена по формуле $P_A(B_i)=\dfrac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\dots+P(B_n)P_{B_n}(A)}.$

Полученные формулы называют *формулами Бейеса* (по имени английского математика, который их вывел; опубликованы в 1764 г.). Формулы Бейеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.

Задача 1. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму — 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым — 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения: деталь проверил первый контролер (гипотеза B_1); деталь проверил второй контролер (гипотеза B_2).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Бейеса: $P_A(B_1) = \dfrac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)}$.

По условию задачи имеем: $P(B_1) = 0{,}6$ (вероятность того, что деталь попадает к первому контролеру);

$P(B_2) = 0{,}4$ (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);

$P_{B_1}(A) = 0{,}94$ (вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером стандартной);

$P_{B_2}(A) = 0{,}98$ (вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером стандартной).

Искомая вероятность $P_A(B_1) = \dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}94}{0{,}6 \cdot 0{,}94 + 0{,}4 \cdot 0{,}98} \approx 0{,}59.$

Как видно, до испытания вероятность гипотезы B_1 равнялась 0,6, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы (точнее, условная вероятность) изменилась и стала равной 0,59. Таким образом, использование формулы Бейеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.

Практические задания по теме

5.1. Есть 10 монет: 8 нормальных, а на двух герб находится с обеих сторон. Наудачу взятая монета бросается три раза. Найти вероятность того, что выпадут три герба.

5.2. В ящике 3 белых и 7 черных шаров. Один шар вынули наудачу и отложили в сторону. Следующий наугад вынутый шар оказался белым. Какова вероятность того, что отложенный шар был белым?

5.3. В ящике 3 белых и 7 черных шаров. Один шар вынут и отложен в сторону. Какова вероятность, что следующий вынутый шар будет белым, если цвет первого неизвестен?

5.4. Число грузовых машин, проезжающих мимо колонки, относится к числу легковых машин как 3:2. Вероятность того, что грузовая машина будет заправляться равна 0.1, а того, что будет заправляться легковая - 0.2. У бензоколонки заправляется машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

5.5. Три охотника одновременно и независимо стреляют в кабана. Известно, что первый попадает с вероятностью 0,8, второй – 0,4, а третий – 0,2. Кабан убит и в нем обнаружены две пули. Как делить кабана?

5.6. При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор С-1 с вероятностью 0,8, а сигнализатор С-11 срабатывает с вероятностью 1. Вероятности того, что автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-11, соответственно равны 0,6 и 0,4. Получен сигнал о автомата. Что вероятнее: автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-11?

5.7. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса 4, из второй — 6, из третьей группы — 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадает в сборную института, соответственно равны 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент?

5.8. Пассажир может приобрести билет в одной из двух касс. Вероятность его обращения в первую кассу составляет 0,4 , а во вторую 0,6. Вероятность того, что в кассах билетов уже нет такие: для первой — 0,1, для второй - 0,5. Пассажир обратился в одну из касс и приобрел билет. Какова вероятность того, что он приобрел билет в первой кассе?

5.9. Есть четыре игральных кубика и одна правильная пирамида с цифрами на гранях 1, 2, 3 и 4. Наугад выбрали предмет и бросили. Выпала цифра 4. Какова вероятность, что взяли кубик?

Тема 6. Повторение испытаний

Вопрос 6.1 Формула Бернулли

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события* A.

В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Ниже воспользуемся понятием *сложного события*, понимая под ним совмещение нескольких отдельных событий, которые называют *простыми*.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p. Следовательно, вероятность ненаступления события A в каждом испытании также постоянна и равна $q=1–p$.

Поставим перед собой задачу вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $n–k$ раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие A повторилось ровно k раз в определенной последовательности. Например, если речь идет о появлении события A три раза в четырех испытаниях, то возможны следующие сложные события: $AAA\overline{A}$, $AA\overline{A}A$, $A\overline{A}AA$, $\overline{A}AAA$. Запись $AAA\overline{A}$, означает, что в первом, втором и третьем испытаниях событие A наступило, а в четвертом испытании оно не появилось, т. е. наступило противоположное событие $\overline{A}$; соответственный смысл имеют и другие записи.

Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$. Например, символ $P_5(3)$ означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Поставленную задачу можно решить с помощью так называемой формулы Бернулли.

Вывод формулы Бернулли. Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $n–k$ раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий равна $p^k q^{n-k}$. Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов, т. е. C_n^k. Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Поскольку же вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность (появления k раз события A в n испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Полученную формулу называют *формулой Бернулли*.

Задача 1. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна p=0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжение каждых из 6 суток постоянна и равна p=0,75. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$ Искомая вероятность по формуле Бернулли равна $P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = 15 \cdot (0{,}75)^4 \cdot (0{,}25)^2 = 0{,}30$.

Вопрос 6.2 Наивероятнейшее число наступления события

Биноминальное распределение (распределение по схеме Бернулли) позволяет, в частности, установить, какое число появлений события A наиболее вероятно. Формула для наивероятнейшего числа наступления события k имеет вид:

$np - q \le k \le np + p$, причем:

а) если число $np - q$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число;

б) если число $np - q$ – целое, то существуют два наивероятнейших числа, а именно k и k+1;

в) если число np – целое, то наивероятнейшее число $k = np$.

Задача 1. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равно 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытания.

Решение. По условию n=15, p=0,9, q=0,1. Найдем наивероятнейшее число k из двойного неравенства $15 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le k \le 15 \cdot 0{,}9 + 0{,}9$; $13{,}5 \le k \le 14{,}4$. Следовательно, $k = 14$.

Задача 2. Данные длительной проверки качества выпускаемых стандартных деталей показали, что в среднем брак составляет 7,5%. Определить наивероятнейшее число исправных деталей в партии из 39 штук.

Решение. По условию n=39, q=0,075. Тогда p=0,925. Найдем наивероятнейшее число k из двойного неравенства $39\cdot 0{,}925-0{,}075\le k\le 39\cdot 0{,}925+0{,}925$; $36\le k\le 37$. Следовательно, наивероятнейшее число исправных деталей равно 36 или 37.

Задача 3. При каком количестве выстрелов наивероятнейшее число попаданий равно 16, если вероятность попадания при каждом выстреле составляет 0,7?

Решение. По условию k=16, p=0,7, q=0,3. Составим неравенство $0{,}7\cdot n-0{,}3\le 16\le 0{,}7\cdot n+0{,}7$. Откуда $\begin{cases}0{,}7\cdot n-0{,}3\le 16\\ 16\le 0{,}7\cdot n+0{,}7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0{,}7\cdot n\le 16{,}3\\ 15{,}3\le 0{,}7\cdot n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n\le 23\dfrac{2}{7}\\ 21\dfrac{6}{7}\le n\end{cases}$

Таким образом, число выстрелов может быть 22 или 23.

Вопрос 6.3 Локальная теорема Лапласа

Очевидно, что пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами. Естественно возникает вопрос: нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно. Локальная теорема Лапласа и дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

Заметим, что для частного случая, а именно для p=1/2, асимптотическая формула была найдена в 1730 г. Муавром; в 1783 г. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного p, отличного от 0 и 1. Поэтому теорему, о которой здесь идет речь, иногда называют теоремой Муавра—Лапласа.

Доказательство локальной теоремы Лапласа довольно сложно, поэтому мы приведем лишь формулировку теоремы и примеры, иллюстрирующие ее использование.

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции

$$y=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)\ \text{ при }\ x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, соответствующие положительным значениям аргумента x (см. приложение 1 В.Е. Гмурман «Теория вероятностей и математическая статистика»). Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция $\varphi(x)$ четна, т.е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Задача 1. Найти вероятность того, что событие *A* наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию, n=400; k=80; p=0,2; q= 0,8. Воспользуемся асимптотической формулой Лапласа:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(x).$$

Вычислим определяемое данными задачи значение x:

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0.$$

По таблице приложения 1 находим $\varphi(0) = 0{,}3989.$

Искомая вероятность $P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0{,}3989 = 0{,}04986.$

Формула Бернулли приводит примерно к такому же результату: $P_{400}(80) = 0{,}0498.$

Задача 2. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле p=0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень 8 раз.

Решение. По условию, n=10; k=8; p=0,75; q= 0,25. Воспользуемся асимптотической формулой Лапласа:

$$P_{10}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} \cdot \varphi(x) = 0{,}7301 \cdot \varphi(x).$$

Вычислим определяемое данными задачи значение x:

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 10 \cdot 0{,}75}{\sqrt{10 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} = 0{,}36.$$

По таблице приложения 1 находим $\varphi(0{,}36) = 0{,}3739.$

Искомая вероятность $P_{10}(8) = 0{,}7301 \cdot 0{,}3739 = 0{,}273.$

Формула Бернулли приводит к иному результату, а именно $P_{10}(8) = 0{,}282.$ Столь значительное расхождение ответов объясняется тем, что в настоящем примере n имеет малое значение (формула Лапласа дает достаточно хорошие приближения лишь при достаточно больших значениях n).

Вопрос 6.4 Интегральная теорема Лапласа

Вновь предположим, что производится n испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* постоянна и равна p ($0<p<1$). Как вычислить вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие *A* появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз (для краткости будем говорить «от k_1 до k_2 раз»)? На этот вопрос отвечает интегральная теорема Лапласа, которую мы приводим ниже, опустив доказательство.

Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность p наступления события

A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз , приближенно равна определенному интегралу

$$P_n(k_1,k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \qquad (6.1)$$

где $x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $x'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами, так как неопределенный интеграл $\int e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ не выражается через элементарные функции. Таблица для интеграла

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ приведена в конце книги В.Е. Гмурман «Теория вероятностей и математическая статистика» (приложение 2). В таблице даны значения функции $\Phi(x)$ для положительных значений x и для x=0; для x<0 пользуются той же таблицей (функция $\Phi(x)$ нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$). В таблице приведены значения интеграла лишь до x=5, так как для x>5 можно принять $\Phi(x) = 0{,}5$. Функцию $\Phi(x)$ часто называют функцией Лапласа.

Для того чтобы можно было пользоваться таблицей функции Лапласа, преобразуем соотношение (6.1) так:

$$P_n(k_1,k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x'} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Итак, вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз, $P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'),$ где $x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $x'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Приведем пример, иллюстрирующий применение интегральной теоремы Лапласа.

Задача 1. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна p=0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию, p=0,2; q=0,8; n=400; k_1=70; k_2=100. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа: $P_{400}(70,100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$.

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25\,;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

Таким образом, имеем $P_{400}(70{,}100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25)$.

По таблице приложения 2 находим: $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$; $\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$.

Искомая вероятность $P_{400}(70{,}100) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882$.

Практические задания по теме

6.1. В кошельке лежат 8 монет достоинством 5 копеек и 2 монеты достоинством 3 копейки. Наудачу выбирается монета и бросается 5 раз. Какова вероятность того, что в сумме будет 15 очков, если герб принимается за 0 очков.

6.2. Произведено 10 подбрасываний одной из трех монет: одна достоинством 3 копейки, одна достоинством 2 копейки и одна достоинством 1 копейка. Какова вероятность того, что в сумме будет 6 очков, если герб принимается за 0 очков.

6.3. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

6.4. Отдел технического контроля проверяет партию из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,75. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

6.5. Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,6. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже.

6.6. Найти наивероятнейшее число правильно набитых перфораторщицей перфокарт среди 19 перфокарт, если вероятность того, что перфокарта набита неверно, равна 0,1.

6.7. Два равносильных противника играют в шахматы. Найти наивероятнейшее число выигрышей для любого шахматиста, если будет сыграно 2N результативных (без ничьих) партий.

6.8. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность промаха при одном выстреле для первого стрелка равна 0,2, а для второго — 0,4. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых не будет ни одного попадания в мишень, если стрелки произведут 25 залпов.

6.9. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8, а для второго — 0,6. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых оба стрелка попадут в мишень, если будет произведено 15 залпов.

6.10. Сколько надо произвести независимых испытаний с вероятностью появления события в каждом испытании, равной 0,4, чтобы наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях было равно 25?

6.11. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,3. Найти число испытаний n, при котором наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях будет равно 30.

6.12. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,7. Найти число испытаний n, при котором наивероятнейшее число появлений события равно 20.

6.13. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 49 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30?

6.14. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 39 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?

6.15. Батарея произвела шесть выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,3. Найти: а) наивероятнейшее число попаданий; б) вероятность наивероятнейшего числа попаданий; в) вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого достаточно хотя бы двух попаданий.

6.16. Прибор состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,2. Найти: а) наивероятнейшее число отказавших элементов; б) вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов; в) вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы четыре элемента.

Рекомендуемая литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. 12-е изд.. Москва: Юрайт, 2014. 478 с
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учеб. пособие для студентов вузов. 12-е изд. Москва : Юрайт, 2014.– 400 с.: ил.
3. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2016. – 352 с.