МИНОБРНАУКИ РОССИИ
политехнический колледж филиала федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Майкопский государственный технологический университет» в поселке Яблоновском

Методические указания для выполнения самостоятельной работы

по дисциплине «Математика»

для студентов очной формы обучения

Раздел: Производная. Первообразная.

п. Яблоновский 2018

УДК [330.15:574] (07)
ББК 20.18
М-54

Одобрено предметной (цикловой) цикловой комиссией
информационных и математических дисциплин
Протокол №8 от 27 июня 2018г
Председатель предметной (цикловой) комиссии
Схаплок А.А.

Разработчик: Шартан Р.Я.– преподаватель первой категории политехнического колледжа филиала федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Майкопский государственный технологический университет»

в п. Яблоновском

Предисловие.

СРС является развитие мотивации к изучению и пользованию дополнительной литературой, усовершенствование умения выделять главное из общей информации, совершенствование ораторских навыков и получение студентом более глубоких знаний по дисциплине для специальностей 38.02.07 Банковское дело, 38.02.02 Страховое дело (по отраслям), 09.02.03 Программирование в компьютерных системах, 43.02.15 Поварское и кондитерское дело, 40.02.01 Право и организация социального обеспечения.

Алгоритм работы студента может включать в себя:

- поиск литературы в библиотеках колледжа, библиотеках г. Краснодара, в Интернете;
- работа с книгами и другой литературой;
- сведения дополнительной информации в общий последовательный текст;
- оформление работы в соответствие с требованиями;
- подготовка выступления.

Самостоятельная работа студентов может быть индивидуальной, парной и в группе (3-5 человек).

Подведение итогов СРС может быть в виде выступлений на занятии, семинаре, конференции или использовании данных в качестве учебного пособия.

Оценка СРС осуществляется по содержанию и оформлению, а также устному выступлению студента.

Цели самостоятельной работы:

- закрепление, углубление, расширение и систематизация знаний, самостоятельное овладение новым учебным материалом;
- формирование профессиональных явлений;
- формирование умений и навыков самостоятельного умственного труда;
- мотивирование регулярной целенаправленной работы по освоению специальности;
- развитие самостоятельного мышления;
- формирование убежденности, волевых черт характера, способности к самоорганизации.

Содержание

1.Производная.

1.1. Вычисление производных.

Определение. Пусть функция y=f(x) определена в некоторой точке x окрестности. Если существует конечный предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Δy – приращение функции, Δx – приращение аргумента) при условии, что $\Delta x \to 0$, то указанный предел называется **производной** функции y=f(x) в точке x и обозначают f′ ′(x).Тогда можно записать: $f'(x)= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Замечание: y′= f ′(x) – это новая функция, связанная с функцией y=f(x) и определенная во всех таких точках x, в которых существует указанный выше предел. Эту функцию называют **производной** функции y=f(x)

Производные элементарных функций

1. $C'=0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$.
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
4. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $\sin'x=\cos x$
6. $\cos'x=-\sin x$
7. $\mathrm{tg}'x= \frac{1}{cos^2x}$
8. $\mathrm{ctg}'x=-\frac{1}{sin^2x}$
9. $(e^x)' = e^x$
10. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
11. $\ln' x = \frac{1}{x}$
12. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\quad (|x| < 1)$
13. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\quad (|x| < 1)$

14. (arctgx) $'=\frac{1}{1+x^2}$

15. (arcctgx) $'=-\frac{1}{1+x^2}$.

Правила вычисления производных.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(c\ f(x))' = c\ f'(x)$.
2. Производная суммы (разности) двух функций: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. Производная произведения двух функций: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$.

4. Производная частного двух функций: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x).}{g^2(x)}$

5.Производная сложной функции y= f (ax+b)

$y' = (f(ax+b))' = a\, f'(ax+b)$

Теорема о производной сложной функции. Пусть y=f(u), u=g(x), тогда y=f(g(x))- сложная функция. Если функция y=f(u), u=g(x) имеют производные, то производные сложной функции y=f(g(x)) вычисляется по формуле

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g(x)'$ или $y' = f'(u) \cdot u'(x)$.

Упражнение. **Найти производные функций: а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = \sqrt{x}$.**

Решение. Для того, чтобы использовать формулу производной степенной функции, преобразуем к степенному виду:

а) $\frac{1}{x} = x^{-1}$, тогда $(x^{-1})' = (-1)\, x^{-1-1} = -x^{-2}$. После преобразований получим

$\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$.

б) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, значит $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$ или $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Эти формулы полезно запомнить, так как они достаточно часто встречаются при решении задач, однако для вычисления производных не менее важна и сама идея получения этих формул.

Рассмотрим ряд задач.

1.1.Найдите значение производной y= $\boldsymbol{x^5-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{3}x^3-x+5}$ в точке $\boldsymbol{x_0}$=1.

1. $4\frac{1}{3}$ 2. $5\frac{1}{6}$ 3. $\frac{3}{5}$ 4. $5\frac{2}{3}$

Решение: Найдем производную функции в произвольной точке x. Используя формулу производной степенной функции и правило вычисления производной суммы функции, имеем:

y$'$ =$\left(x^5-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{3}x^3-x+5\right)'=(x^5)'-(\frac{1}{6}x^4)'+(\frac{1}{3}x^3)'-(x)'+(5)'$=

=$5x^4-\frac{1}{6}\cdot 4x^3$+$\frac{1}{3}3x^2$ -1=$5x^4-\frac{2}{3}x^3$+x^2 -1.

Подставим в производную значение x_0=1, тогда y$'$=5$\cdot$ $1^4-\frac{2}{3}\cdot 1^3$+1^2 -1=4$\frac{1}{3}$.

Ответ: номер верного ответа 1.

1.2. Найдите значение производной y=$\boldsymbol{x^4-\frac{6}{x^3}}$в точке $\boldsymbol{x_0}$=2.

1) $30\frac{7}{8}$ 2) $33\frac{1}{8}$ 3) $17\frac{1}{8}$ 4) $15\frac{1}{4}$

Решение: Преобразуем функцию к степенному виду y=x^4-6x^{-3}. Тогда

y$'$=4x^3+18x^{-4}, y$'$=4$x^3+\frac{18}{x^4}$. Подставив в найденную производную значение x_0=2 , y$'$=4$\cdot$ $2^3+\frac{18}{2^4}=32+\frac{18}{16}$=33$\frac{1}{8}$.

ответ: номер верного ответа 2.

1.3. Найти значение производной функции y= 4x−cosx в точке $\boldsymbol{x_0}$=$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$.

1) $4+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $3\frac{1}{2}$ 3) $\frac{4\pi+3}{6}$ 4) $4\frac{1}{2}$

Решение: Найдем производную функции

$y'=(4x-\cos x)'=4-(-\sin x)=4+\sin x$

$y'=4+\sin x$. Подставив $x_0=\frac{\pi}{6}$ получим $y'=4+\sin\frac{\pi}{6}=4+\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}$.

Ответ: номер верного ответа 4 .

1.4. **Найти значение производной функции $y=(5x-4)^6$.**

1. $y'=6(5x-4)^5$ 2. $y'=6\cdot 5x^5$ 3. $y'=30(5x-4)^5$ 4. $y'=\frac{6}{5}(5x-4)^5$

Решение: По правилу вычисления производной сложной функции $y=f(ax+b)$ имеем $y'=(30(5x-4)^6)'=6(5x-4)^5(5x-4)'=6\cdot 5(5x-4)^5=30(5x-4)^5$.

Ответ: номер правильного ответа 3.

Задания для самостоятельной работы.

1.5. Найти значения производной функции $y=3x^4-2x^2+x-1$ в точке $x_0=1$

1) 9 2) 5 3) 4 4) 6.

1.6. Найти значения производной функции $y=x^6-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2-2$ в точке $x_0=1$

1) 6 2) 4 3) 2 4) 0.

1.7. Найти значения производной функции

$y=x^3-\frac{1}{x}$ в точке $x_0=2$

1) $11\frac{3}{4}$ 2) $12\frac{1}{4}$ 3) $11\frac{1}{2}$ 4) $4\frac{1}{4}$

1.8. Найти значения производной функции $y=\sqrt[3]{x^4}$ в точке x_0=8

1) $\frac{32}{3}$ 2) $\frac{16}{3}$ 3) 16 4) $\frac{8}{3}$

.

1.9 Найти значения производной функции $y=tgx+x^2$

1) $y' = \frac{1}{cos^2x} + 2x$ 2) $y' = -\frac{1}{sin^2x} + 2x$

3) $y' = -\frac{1}{cos^2x} + 2x$ 4) y' =ctgx+2x.

1.**10. Найти значения производной функции $y=3^x-3x^4$**

1) $y' = 3x^2 \ln 3 - 12x^3$ 2) $y' = x\cdot 3^{x-1} - 12x^3$

3) $y' = 3\cdot 3^{x-1} - \frac{3}{4}x^3$ 4) $y' = \frac{3^x}{\ln 3} - x^3$.

1.11. Найти значения производной функции $y=2^x + \cos x$

1) $y' = 2^x - \sin x$ 2) $y' = x2^{x-1} + \cos x$

3) $y'=2^x\ln 2 - \sin x$ 4) $y'= 2^x\ln 2 - \cos x$.

1.12. Найти значения производной функции $y=4^x - 2\cos x$

1) $y' = 4^x\ln 4 - 2\sin x$ 2) $y' = 4^x\ln 4 + 2\sin x$

3) $y'=x4^{x-1} - 2\sin x$ 4) $y'=4^x + 2\sin x$.

1.13. Найти значения производной функции $y=2 - \ln 5x$ в точке $x_0=\frac{1}{5}$

1) $-\frac{1}{5}$ 2) 1 3) -1 4) -5 .

1.14. Найти значения производной функции f(x)=$(10x-4)^8$ в точке x_0=$\frac{1}{2}$

1) 80 2) 8 3) 1 4) 7 .

1.15. Найти значения производной функции f(x)=$(3x-2)^6$

1) $y' = 6(3x-2)^5$ 2) y' =$18(3x-2)^6$
3) y'=$18(3x-2)^5$ 4) $y' = 6(3x-2)^6$

1.16. Найти значения производной функции y=$e^{-x}+x^2$

1) $y' = -e^{-x}+x^2$ 2) y' =$e^{-x}+2x$
3) y'=$-e^{-x}+2x$ 4) $y' = e^{-x}-2x$

1.17. Найти значения производной функции y=ln$(x-3)$ в точке x_0=2

1) 1 2) -1 3) 0 4) 3

1.18. Найти значения производной функции y=ln$(5-2x)$ в точке x_0=2

1) 0 2) 1 3)-1 4) -2

1.19. Найти значения производной функции y=$\sin 4x - x^2$

1) $y' = 4\cos 3x - 4x^3$ 2) y' =$4\sin 4x - 3x^3$
3) y'=$-4\sin 4x - 4x^3$ 4) $y' = 4\cos 4x - 4x^3$

1.20. Найти значения производной функции y=$\sin(4x-5) - x^4$

1) $y' = 4\cos 4x - 4x^3$ 2) y' =$4\sin(4x-5) - 4x^3$

3) $y'=-4\sin 4x-4x^3$ 4) $y'=4\cos(4x-5)-4x^3$

1.2. Геометрический и физический смысл производной

Геометрический смысл производной. Если к графику функции

y= f(x) в точке с абсциссой x_0можно провести касательную, не параллельную оси Oy, то значение производной f $'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной y= kx+b, то есть k= f $'(x_0)$.

Замечание. Так как угловой коэффициент k=tgα, где α- угол наклона касательной к оси Ox, то верно равенство производной f $'(x_0)$= tgα.

Уравнение касательной к графику функции y= f(x) в точке с абсциссой x_0 имеет вид y== f(x_0)+ f $'(x_0)(x-x_0)$.

Физический смысл производной. Если материальная точка движется прямолинейно по закону s(t), то производная функции y= s(t) выражает мгновенную скорость материальной точки в момент времени t_0, т.е.v=s$'(t_0)$.

Замечание. При решении задач будем считать, что если s$'(t_0)$=0, то в момент времени t_0 точка останавливается.

Рассмотрим ряд задач.

1.21.Через точку графика функции f(x)=$-\frac{1}{2}x^2+4x+7$ с абсциссой x_0=2 проведена касательная. Найдите тангенс угла наклона этой касательной к положительному направлению оси абсцисс.

1) -1 2) 2 3) 6 4) 17

Решение. Исходя из геометрического смысла производной имеем:

$\mathrm{tg}\alpha$= f $'(x_0)$, где α −угол наклона касательной к оси абсцисс.

Найдем производную в произвольной точке: f′(x)= − x+4. Тогда тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс: $\mathrm{tg}\alpha$= f ′(2)=2.

Ответ: номер верного ответа 2.

1.22.Найдите абсциссу точки графика функции f(x)=14x^2−27x+15, в которой касательная наклонена под углом 45°к оси абсцисс.

1) $\frac{29}{27}$ 2) $-\frac{28}{15}$ 3) 2 4) 1

Решение. Угловой коэффициент касательной равен тангенсу наклона касательной к оси абсцисс, т.е. k= tg45°=1. Тогда f $'(x_0)$=1. Учитывая, что

f′(x)=28x – 27, получаем уравнение $28x_0 - 27 = 1$, тогда x_0=1

Ответ: номер верного ответа 4.

1.23. К графику функции f(x)=3x^2- 8x+15 проведена касательная параллельно прямой y=4x-3. Найдите абсциссу точки касания.

1) $\frac{5}{6}$ 2) $-\frac{1}{2}$ 3) 2 4)- $\frac{5}{3}$

Решение: Касательная параллельна прямой y=4x-3, значит, их угловые коэффициенты совпадают, тогда угловой коэффициент касательной равен k=4.

Найдем производную функции : f′(x)=6x – 8.Исходя из геометрического смысла производной, имеем f $'(x_0)$=4, т.е. $6x_0 - 8 = 4$, тогда x_0=2

Ответ: номер верного ответа 3.

1.24. Найдите произведение абсцисс точек, принадлежащих графику функции f(x) = $\frac{x^3}{3}$ $-4x^2+5x+7$, в которых касательная наклонена под углом 135° к оси абсцисс.

1)18 2)-6 3) -8 4) 6

Решение: Касательная наклонена под углом 135°, следовательно, значение производной в этой точке $f'(x_0)$= tg135°. Так как

$f'(x)= x^2 - 8x+5$ и tg135°=-1, получаем квадратное уравнение

${x_0}^2 - 8x_0+5=-1$, ${x_0}^2 - 8x_0+6=0$. Дискриминант уравнения $D > 0$, а по теореме Виета произведение корней этого уравнения равно 6.

Ответ: номер верного ответа 4.

1.25. Материальная точка движется прямолинейно по закону s(t)=$t^3 - \frac{13t^2}{2}$+2t+4

Найдите момент времени

t_0, в который мгновенная скорость будет ровна **12**.

1) 5 2) 1,5 3) $\frac{2}{3}$ 4) 13

Решение: Мгновенная скорость материальной точки $v(t_0)$=12, а производная закона движения $s'(t)=3{t_0}^2 - 13t_0 + 2$. Тогда

$3{t_0}^2 - 13t_0 + 2$=12, т.е. $3{t_0}^2 - 13t_0 - 10 = 0$.

Корни уравнения: $t_1 = -\frac{2}{3}$ и $t_2 = 5$.

По смыслу задачи $t \geq 0$, t=5-искомый момент времени.

Ответ: номер верного ответа 4.

1.26. Прямолинейное движение материальной точки задано уравнение s(t)=$t^3 - 16t^2$-91t+1456.

Найдите момент времени

$\boldsymbol{t_0}$, когда материальная точка остановится.

1) 1456 2) 13 3) $\frac{7}{3}$ 4) 16

Решение: Когда материальная точка остановиться, ее мгновенная скорость будет ровна нулю, т.е. $v(t_0)$=0.Производная уравнения движения

$s'(t)=(t^3-16t^2-91t+1456)'=3t^2-32t-91$.

Решим уравнение $3t^2-32t-91=0$,

$t_1=-\frac{7}{3}$ и $t_2=13$.

По смыслу задачи $t\geq 0$, следовательно t=13.

Ответ: номер верного ответа 2.

1.27. Материальная точка движется по закону $x(t)=t^3-5t^2+6t+7$ (x-перемещение в м, t- время в с). Через сколько секунд после начала движения ускорение точки будет равно 8 м/с^2?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Решение: Ускорение материальной точки – это изменение ее скорости, т.е. чтобы найти ускорение a(t) материальной точки в произвольный момент времени t необходимо найти производную скорости.

Мгновенная скорость задается функцией $v(t)=x'(t)$, $v(t)=3t^2-10t+6$, а ускорение – функцией $a(t)=v'(t)$, то есть $a(t)=6t-10$.

Найдем момент времени, когда ускорение точки будет равно 8 м/с^2:

$a(t)=8$, $6t-10=8$, $t=3$.

Ответ: номер верного ответа 3.

Задания для самостоятельной работы.

1.28. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=3x^3-2x^2+5$ в его точке с абсциссой $x_0=-3$.

1)98 2) 69 3) 33 4) 93

1.29. Определите угол, который образует касательная, проведенная к графику функции y=$\frac{4}{x}$ в точке с абсциссой x_0=−2, с положительным направлением оси Ox.

1)45° 2) 30° 3) 60° 4)135°

1.30. Определите абсциссу точки, в которой касательная графику функции $y=4x^2-8x+4$ параллельна оси абсцисс.

1)-8 2) 1 3) 0 4) 4

1.31. На кривой $y=x^2-x+1$ найти точку, в которой касательная параллельна прямой y=3x-1. Укажите абсциссу этой точки.

1)-2 2) 1 3) 2 4) 3

1.32. К графику функции $f(x)= x^2+3x+2$ в точке с абсциссой x_0=0 проведена касательная. Найдите ординату точки графика касательной, абсцисса которой равна 11.

1)36 2) 33 3) 35 4) 32

1.33. К графику функции $f(x)= x^2+x+1$ в точке с абсциссой x_0=1 проведена касательная. Найдите абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox.

1)0 2) $-\frac{1}{2}$ 3) $-\frac{1}{3}$ 4) $\frac{1}{2}$

1.34. Найдите угловой коэффициент касательной, приведенной к графику функции f(x)=sinx− cosx в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{4}$.

1) $\sqrt{2}$ 2) 0 3) 1 4) -1

1.35. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x)=\pi(4x^2+3)$, в которой угловой коэффициент касательной равен $\frac{\pi}{4}$.

1) $\frac{\pi}{8}$ 2) $\frac{1}{32}$ 3) 2π 4) $\frac{1}{12}$

1.36.Найдите угловой коэффициент касательной, приведенной к графику функции $f(x)=4x^2-4x+1$ в точке пересечения графика с осью ординат.

1) 0,5 2) $\frac{3}{8}$ 3) -4 4) 0

1.37. К графику функции $f(x)=x^3-2x$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_0=2$. Как расположена точка пересечения этой касательной с осью Ох?

1) правее точки (3;0) 2) левее точки (0;0)
2) правее точки (1;0) 4) в точке (3;0)

1.38. Тело движется по прямой так, что расстояние S(м) от него до точки М этой прямой изменяется по закону $S(t)=t^4+\frac{1}{3}t^3-t^2+8$. Чему будет равна мгновенная скорость (м/с) через 3 секунды после начала движения?

1) 123 2) 111 3) 108 4) 121

1.39. Тело движется по прямой так, что расстояние S(м) от него до точки М этой прямой изменяется по закону $S(t)=5t^2+3t+6$. Через сколько секунд после начала движения произойдет остановка?

1) $\frac{3}{10}$ 2) $\frac{10}{3}$ 3) $\frac{3}{5}$ 4) 6

1.40. Материальная точка движется по закону

$x(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2+9t+11$

(x-перемещение в м, t - время в с). Через сколько секунд после начала движения ускорение точки будет равно 10 м/с^2?

1) 6 2) 2 3) 3 4) 4

1.41. Материальная точка движется по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-6t^2+61$

(x-перемещение в м, t - время в с).

Через сколько секунд после начала движения ускорение точки будет равно 6 м/с^2?

1) 9 2) 2 3) 3 4) 4

1.42. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$s(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+4t+5$. Найдите момент времени t_0, в который мгновенная скорость будет в 3 раза больше, чем в момент времени t=2.

1) 2 2) $\frac{1}{6}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) 4

2. Исследование функций с помощью производной.

2.1. Критические точки, экстремумы и промежутки монотонности непрерывных функций.

Определение 2.1. ***Критическими точками*** **функции** y= f(x) называется внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует.

Промежутки монотонности функции.

Определение 2.2. Функция y= f(x) называется **возрастающей** на промежутке X, если для двух значений аргумента x_1 и x_2 из X, таких что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение2.3. Функция y= f(x) называется **убывающей** на промежутке X, если для двух значений аргумента x_1 и x_2 из X, таких что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Промежутки возрастания и убывания функции иногда объединяют общими терминами - **промежутки монотонности функции**.

Теорема 2.1 Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ (причем уравнение $f'(x) = 0$ имеет лишь конечное множество корней) то функция y= f(x) возрастает на промежутке X.

Теорема 2.2. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$ (причем уравнение $f'(x) = 0$ имеет лишь конечное множество корней) то функция y= f(x) убывает на промежутке X.

Замечание. Часто возникает вопрос о необходимости включения граничных точек в промежутки монотонности. Обычно, если функция непрерывна не только на рассматриваемом открытом промежутке, но в общем случае промежутки монотонности функции принято оставлять открытыми.

Экстремумы функции.

Определение2.4. Точка $x=x_0$ называется точкой минимума функции y= f(x), если существует окрестность точки x_0, для каждой точки которой (кроме самой точки x_0) выполняется неравенство

$f(x) > f(x_0)$

Определение2.5. Точка $x=x_0$ называется точкой максимума функции y= f(x), если существует окрестность точки x_0, для каждой точки которой (кроме самой точки x_0) выполняется неравенство

$f(x) < f(x_0)$.

Точки минимума и максимума функции также объединяют общим названием – **точки экстремума** функции.

Теорема 2.3. Если функция y= f(x) имеет экстремум в точке $x=x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует.

Теорема 2.4. Достаточное условие экстремума. Пусть функция y= f(x) непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка критическую точку x$< x_0$. Тогда:

а) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней при x$< x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0,$ а при x$> x_0$- неравенство $f'(x) > 0,$ то x$= x_0$- точка минимума функции y= f(x);

б) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней при x$< x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0,$ а при x$> x_0$- неравенство $f'(x) < 0,$ то x$= x_0$- точка максимума функции y= f(x);

в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x$= x_0$ экстремума нет.

Схема нахождения промежутков монотонности и экстремумов непрерывной функции.

1.Найти производную y= f′(x);

2.Найти критические точки.

3.Отметить критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.

4.сделать вывод о монотонности функции, ее точках экстремума и значениях функции в точках экстремума.

Рассмотрим ряд задач.

2.1. Найдите все промежутки возрастания функции $f(x)= -x^4+2x^2+1$

1) $(-\infty; -1)$ 2) $(0;1)$

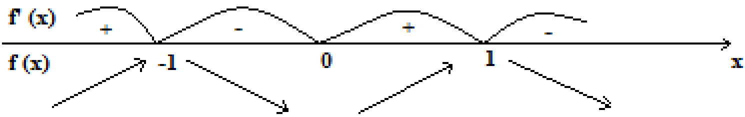
3) $(-\infty; -1); (0; 1)$ *4)* $(-1; 0)$

Решение: Проведем решение по схеме, описанной выше.

1. Найдем производную $f'(x)=-4x^3+4x$ и преобразуем ее: $f'(x)= -4x(x^2-1)=-4x(x-1)(x+1)$.

2. Критическими точками рассматриваемой функции являются точки, в которых f′(x)=0, - это точки x=-1, x=0, x=1.

3. Расположим критические точки на числовой прямой и определим м из полученных промежутков.



4.Промежутками возрастания являются те, в которых производная положительна, т.е. $(-\infty; -1)$и $(0; 1)$.

Ответ: номер верного ответа 3

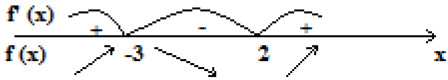
2.2. Найдите значение функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x$ в точке максимума

1) 12,5 2) 13 3) 13,5 4)12

Решение: 1. Найдем производную $f'(x)=x^2+x-6$

2.Так как производная везде определена, то найдем критические точки, решив уравнение $x^2+x-6=0$, $x=-3$ и $x=2$.

3.Расположим найденные значения на числовой прямой и определим знаки производной на каждой из полученных промежутков.

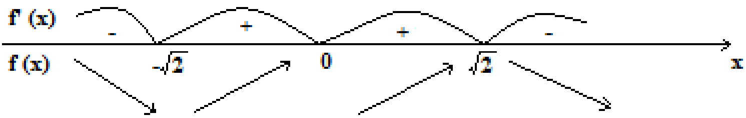


2.3. Найдите точку минимума функции $f(x)=-1,5\,x^5+5x^3+1$

1) -1 2) $-\sqrt{2}$ 3) 0 4) $\sqrt{2}$

Решение: Вычислим производную $f'(x)=-7,5x^4+1,5x^2$ и найдем критические точки, решив уравнение $f'(x)=0$

$-7,5x^4+1,5x^2=0$, $-7,5x^2(x^2-2)=0$



Критическими точками являются x=0, $x=-\sqrt{2}$, $x=\ \sqrt{2}$, при этом

$x=-\sqrt{2}$ является точкой минимума, т.к. в ней производная меняет знак с «минуса » на «плюс». Заметим, что точка x=0 не является точкой экстремума для данной функции.

Задания для самостоятельной работы.

2.4. Найдите длину промежутка убывания функции $f(x)=2x^3-15x^2+24$

1) 3 2) 5 3) 4 4) 1

2.5. Найдите все промежутки убывания функции $f(x)=\frac{1}{4}x^4+2x^3+\frac{5}{2}x^2-2$

1) $(-\infty;0)$;(2;5) 2) $(-\infty;0)$;(1;5)
3) (0; 1); (5;+ ∞) 4) (2;5)

2.6. Найдите все промежутки возрастания функции $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2-1$

1) $(-\infty;0)$; (0;5) 2) (0; 5); (5;+ ∞)
3) (5;+ ∞) 4) $(-\infty;0)$; (5;+ ∞)

2.7. Найти количество натуральных значений, являющихся внутренними точками промежутка убывания функции $y=x^2-5x+2$

1) 3 2) 2 3) 5 4) 6

2.8. Найдите точки максимума функции $y==x^3-12x^2$

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{4}{3}$ 3) $-\frac{2}{3}$ 4) 0

2.9. Найдите значение функции $f(x)=-\frac{1}{2}x^4-x^3+x^2-3$ в точке минимума

1) 1 2) -4 3) -3 4) 4

2.10. Найдите значение функции $f(x)=2x^3-\frac{1}{2}x^2-x$ в точке максимума

1) $\frac{9}{54}$ 2) $\frac{11}{54}$ 3) $\frac{11}{27}$ 4) $\frac{9}{27}$

2.11. Найти сумму значений функции
$f(x)=\frac{1}{4}x^4-4x^3+18x^2+9$ в точках максимума и минимума

1) 7 2) 9 3) 11 4) 13

2.12. Вычислите сумму натуральных значений x, принадлежащих интервалам убывания функции $f(x)=x^3-3x^2-18x+40$.

2.13. Вычислите сумму целых значений x, не превышающих по модулю 7 и являющихся внутренними точками промежутка (или промежутков) возрастания функции y = f(x), если ее производная имеет вид
$f'(x)=x^3-4x^2-15x+60$.

2.2. Наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции на отрезке.

Теорема 2.5. Если функция y = f(x) непрерывна на отрезке [a;b], то она достигает на нем своего наименьшего и наибольшего значений.

Наибольшее и наименьшее значение функции могут достигаться как внутри отрезка [a; b] (только в критической точке), так и на его концах.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке.

1.Найти производную $f'(x)$ функции $y = f(x)$.

2.Найти критические точки, лежащие внутри отрезка [a; b].

3.Вычислить значения функции $y = f(x)$ в найденных точках и на концах отрезка. Выбрать среди полученных значений наибольшее ($y_{наиб.}$) и наименьшее ($y_{наим.}$).

Замечание 1. 1. Иногда для сокращения вычислений полезно определить точки минимума и максимума функции.

1. В некоторой литературе для наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке применяются обозначение $\max\limits_{[a;b].} = f(x)$ и $\min\limits_{[a;b].} = f(x)$. Будем использовать оба вида обозначения.

Теорема 2.6. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную точку максимума (минимума) $x=x_0$, то в ней функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значений на этом промежутке.

2.14. Найти наименьшее значение функции $y=x^3-x^2$ на отрезке $[-2;2]$.

1) 0 2) $-\frac{4}{27}$ 3) -12 4) 4

*Решение:*1. Найдем производную функции $y'=(x^3-x^2)'=3x^2-2x$.

2. Так как существует при любых значениях переменных, то найдем критические точки, решив уравнение $y'=0$: $3x^2-2x=0$, $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$- критические точки , причем $x_1=0$- точка максимума, $x_1=\frac{2}{3}$- точка минимума.

3. Обе критические точки принадлежат отрезку $[-2;2]$, но так как, $x = \frac{2}{3}$-точка минимума и требуется найти наименьшее значение, то вычислим значение функции в этой точке и на концах отрезка и выберем из них наименьшее

$f(\frac{2}{3}) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$

$f(-2) = -8-4 = -12$

$f(2) = 8-4 = 4$

Наименьшее из найденных значений:

$y_{наим} = f(-2) = -12$

Ответ: номер верного ответа 3.

2.15.Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)=\frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ на отрезке $[-4; -1]$.

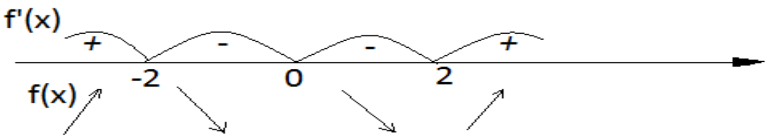
1) $-\frac{5}{2}$ 2) $-\sqrt{2}$ 3) -4 4) $-\frac{9}{2}$

Решение. Найдем производную и преобразуем ее

$f'(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)' = \frac{1}{2} - 2\frac{2}{x^2}$

$f'(x) = \frac{x^2-4}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$

Определим критические точки уравнения $f'(x)=0$, $\frac{(x-2)(x+2)}{2x^2} = 0$, тогда $x=-2$, $x=2$



В точке $x=-2$ производная меняет знак с «плюса» на «»минус, значит, $x=-2$- точка минимума, но она не принадлежит промежутку $[-4; -1]$.

Вычислим значение функции в точке максимума и на концах отрезка:

$f(-2) = \frac{-2}{2} + \frac{2}{-2} = -2$

$f\,(-4)=\frac{-4}{2}+\frac{2}{-4}=-\frac{5}{2}$

$f\,(-1)=\frac{-1}{2}+\frac{2}{-1}=-\ \frac{5}{2}$

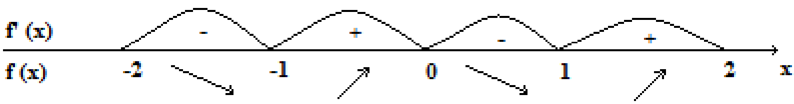
Тогда наибольшее значение $\max\limits_{[-4;-1].} f(x)=f(-2)=-2$,а наименьшее $\min\limits_{[-4;-1]} f(x)= f(-4)= f(-1)=-\frac{5}{2}$, а сумма этих значений равна $-\frac{9}{2}$.

2.16.Найдите наибольшее значение функции $f(x)=x^4-2x^2+4$ на отрезке [-2;2].

Решение: Так как функция определена при всех значениях переменной, то найдем ее критические точки из уравнения

$f'(x)=0$, $f'(x)=4x^3-4x^{2,}$ т.е. получим уравнение $4x^3-4x^2=0$ или $4x(x-1)(x+1)=0$. Корнями уравнения являются $x=0$, $x=1$, $x=-1$. Все корни принадлежат отрезку

[-2;2].



Точкой максимума является только точка $x=0$, значение функции в этой точке $f\,(0)=4$.

Вычислим значение функции на концах отрезка и выберем наибольшее из них. Функция $y= f(x)$ является четной. Действительно,

$f(-x)=(\,-x)^4-2(-x)^2+4=)=x^4-2x^2+4=\ \ f(x)$. Поэтому $f(-2)= f(2)=2^4-22^2+4=$ 12 – это и есть наибольшее значение функции на заданном отрезке.

Ответ:12.

Задания для самостоятельной работы.

2.17. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=x^4-2x^2+5$ на отрезке $[-2;0,5]$.

1) 4 2) 3 3) $4\frac{1}{16}$ 4) 5

2.18. Найдите значение выражения $\frac{y_1+y_2}{4}$, где y_1- наибольшее, а y_2-наименьшее значение функции $y=2x^3+3x^2-36x$ на отрезке $[-5;5]$.

1)21,5 2) 37,5 3) $\frac{37}{4}$ 4) $25\frac{1}{4}$

2.19. Найдите точку, в которой функция $f(x)=2x^3+9x^2-60x+1$ принимает наибольшее значение на промежутке $[-6;6]$.

1) -5 2) 2 3) 6 4) 0

2.20. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=12x-3x^2+2$ на отрезке
$[1;4]$.

1) 12 2) 3 3) 2 4) 15

2.21. Найдите точку, в которой функция $f(x)= x^2+6x+5$ принимает наименьшее значение на отрезке $[1;4]$.

1) 1 2) 2 3) 4 4) 3

2.22. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции
$f(x)= x^4-8x^2+3$ на отрезке $[-1,5; -0,5]$. В ответе укажите количество целых значений, которые принимает функция на этом отрезке.

2.3. Применение производной к решению уравнений и неравенств.

Теорема о существовании корня. Пусть функция y= f(x) непрерывна на отрезке [a; b] и монотонна на этом отрезке (т.е. либо возрастает, либо убывает), тогда ели значение f(a) и f(b) разных знаков, то на отрезке [a; b] существует единственное значение аргумента, при котором f(x)=0.

Среди задач повышенного и высокого уровней сложности встречаются задачи, в решении которых удобно использовать приложения производной для функции. Например, при решении уравнений, неравенств, доказательстве тождеств, построение графиков и т.д. Рассмотрим некоторые примеры решений задач такого типа.

2.23. Докажите, что при $x \geq 0$ имеет место неравенство
$x^2 - x^3 < \frac{1}{6}$.

Решение: Рассмотрим функции $f(x) = x^2 - x^3$ при $x \geq 0$ и найдем промежутки возрастания и убывания.

Вычислим производную $f'(x) = 2x - 3x^2$, $f'(x) = x(2 - 3x)$. Точка $x = \frac{2}{3}$ является критической.

На промежутке $(0; \frac{2}{3})$ производная положительна, значит, функция возрастает. На промежутке $(\frac{2}{3}; +\infty)$ производная отрицательна, значит, функция убывает. Тогда точка $x = \frac{2}{3}$ является точкой максимума, т.е. функция на рассматриваемых промежутках не может принимать значения, большие, чем в точке максимума. Найдем это значение: $f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^2 - (\frac{2}{3})^3$, значит, $f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{27.}$ Но $\frac{4}{27.} < \frac{1}{6}$. Таким образом, неравенство доказано.

2.24. Найдите количество корней уравнения
$3\ln(x+6) + 4\ln(x+7) = -x$.
Решение: Уравнение имеет смысл при
$x > -6$. Перенесемвсе слогаемые уравнения в одну часть:

$3\ln(x+6)+4\ln(x+7)+x=0.$

Обозначим f(x)= $3\ln(x+6)+4\ln(x+7)+x$ и найдем количество нулей полученной функции. Для этого вычислим производную функции, промежутки возрастания, убывания и точки экстремума: $f'(x)=\frac{3}{x+6}+\frac{4}{x+7}+1$, $f'(x)=\frac{x^2+20x+87}{(x+6)(x+7)}$.

$f'(x)=0$, если $x^2+20x+87=0$, тогда $x_1=-10-\sqrt{13}$, $x_2=-10+\sqrt{13}$. Оба значения меньше, чем -6, поэтому всюду на области определения производная положительна, а значит, функция y=f(x) возрастает.

Воспользуемся теоремой о существования корня. Найдем такие значения, a и b, чтобы функция принимала в них значения разных знаков.

Так функция возрастает, то меньшее значение она принимает при меньших значениях аргумента. Поэтому отрицательное значение будем искать вблизи точки $x=-6$. Осевидно, что удобно подставить значение $x=-5$, т.к. первое слагаемое обратится в нуль:

$f(-5)=3\ln(-5+6)+4\ln(-5+7)-5=4\ln 2-5.$

Полученное значение отрицательно, т.к. $2<e,$ тогда $2^4<e^4<e^5$,значит $\ln 2^4<5$. Таким образом, при $x=-5$, $f(-5)<0$.

При большем значении аргумента, например, при x=5 $f(5)=3\ln 11+4\ln 12+5>0$ (сумма положительна, т.к. каждое слагаемое положительно). Поэтому на отрезке $[-5;5]$ по теореме о существовании корня функция имеет один нуль.

Так ка функция возрастает на всей области определения, то других нулей у нее нет. Следовательно, уравнение имеет единственное решение.

Ответ:1.

Задания для самостоятельной работы.

2.25. Найдите количество целых решений неравенства $2x^9-x^5+x>2$, не превышающий по модулю 5.

2.26. Найдите сумму корней уравнения $3^{x+2}-26x=29$.

2.27. Сколько действительных корней имеет уравнение $x^3+3x^2-24x+29=0$?

2.28. Определите, сколько действительных корней имеет уравнение

$$3x^4+8x^3-6x^2-24x+5=0$$

2.29. При каких действительных значениях параметра, а уравнение $x^3-3x^2-\boldsymbol{a}=0$ имеет один корень.

2.30. Найдите все значения параметра, а, при каждом из которых неравенство

$\frac{8x^2-4x+3}{4x^2-2x+1} \le \boldsymbol{a}$ верно для всех действительных значений x.

3.Первообразная.

3.1. Вычисление первообразных.

Определение3.1. Функция y=F(x) называется первообразной y=f(x) на заданном промежутке X , если для всех x из этого промежутка выполняется равенство F′(x)= f(x).

Таблица первообразных элементарных функций.

	Функция f(x).	Функция F(x)
1.	C (постоянная)	Cx
2.	$x^{\alpha}, \alpha \in R, \alpha \neq 0, \alpha \neq -1.$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
3.	$\frac{1}{x}, \ x > 0$	$\ln\lvert x\rvert$
4.	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
5.	e^x	e^x
6.	$sinx$	$-cosx$
7.	$cosx$	$sinx$

8.	$\frac{1}{cos^2x}$	tgx
9.	$\frac{1}{sin^2x}$	$-ctgx$

Правила нахождения первообразных.

1. Если функция y=F(x) и y=G(x)- первообразные соответственно для y= f(x) и y=g(x) на промежутке X, то функция

y= F(x)+ G(x) является первообразной для функции

y= f(x)+ g(x).

2. Если функция y=F(x) является первообразной для функции y= f(x) на промежутке X, то функция y.=C· F(x) является первообразной для функции y = C· f(x).

3. Если функция y=F(x)- первообразная функции y= f(x), то первообразной для функции

y= f (ax+b) является функция y= $\frac{1}{a}\cdot$ F(ax+b).

Неопределенный интеграл.

Теорема 3.1. Если y= F(x) первообразная функции y= f(x) на заданном промежутке X, то у функции y= f(x) бесконечно много первообразных, и все они имеют вид y=F(x)+C, где C- произвольная постоянная.

Определение 3.2. Если функция функции y= f(x) имеет на промежутке X первообразную y=F(x), то множество всех первообразных (т.е. множество функций y=F(x)+C) называют **неопределенным интегралом** от функции y= f(x) и обозначают $\int f(x)\ dx$, т.е. имеет место равенство $\int f(x)\ dx$ = F(x)+C. При этом функцию f(x) называют подынтегральной функцией, а выражение $\int f(x)\ dx$ – **подынтегральным выражением**.

Упражнение: Найдите первообразные функций:а) $f(x) = x$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$.

Решение: В обоих случаях воспользуемся формулой первообразной степенной функции:

а) $x=x^1$, следовательно, $F(x)=\frac{x^{1+1}}{2}+C$, $F(x)=\frac{x^2}{2}+C$;

б) $\sqrt{x} \quad =x^{\frac{1}{2}}$, значит, первообразная ровна: $F(x) \quad =\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$, $F(x)=\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+C$

3.1. Найдите первообразную функции $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$

1) $F(x)= x^4 - x^2 + C$

2) $F(x)= x^4 - x^2 + x + 2$

3) $F(x)= 12x^2 - 2$

4) $F(x)= \frac{4}{3}x^4 - 2x^2 + x + 5$

Решение: Пользуясь правилом нахождения первообразной для суммы функций и таблицей первообразных, найдем первообразную для данной функции в общем виде:

$$F(x)=4\cdot \frac{1}{4}x^4 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + x + C \text{ или } F(x)= x^4 - x^2 + x + C .$$

Так как C – произвольная постоянная, то, в частности, она может равна, поэтому одной из первообразной указанной является $F(x)= x^4 - x^2 + x + 2$.

Ответ: номер верного ответа 2.

3.2. Найдите первообразную функции $f(x) = 5 - cosx + x^2$

1) $F(x)= 5x + sinx + \frac{x^3}{3} + 5$

2) $F(x)=sinx + 2x$

3) $F(x)= -sinx + \frac{x^3}{3} + C$

4) $F(x)= 5x - sinx + \frac{x^3}{3} + 1$

Решение. Найдём первообразную данной функции в общем виде:

$F(x)= 5x - sinx + \frac{x^3}{3} + C.$ Поскольку C может быть любым числом, одной из первообразных данной функции является

$F(x)= 5x - sinx + \frac{x^3}{3} + 1$

Ответ: номер верного ответа 4.

3.3. Для функции $f(x) = x\sqrt[3]{x^2}$ на промежутке (0;+∞)найдите первообразную F(x), график которой проходит через M(8;66).

1) $F(x)=3\sqrt[3]{x^4}+18$

2) $F(x)=\frac{1}{2}x^2+34$

3) $F(x)=\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}-30$

4) $F(x)=\frac{8}{3}\sqrt[3]{x^8}-\frac{1850}{3}$

Решение: Преобразуем функцию к виду $f(x)=x^{\frac{5}{3}}$, тогда первообразная имеет вид $F(x)=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+C$. Так как график проходит через точку M(8;66), то F(8)=66 и $F(8)=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+C$, тогда $\frac{3}{2^3}\cdot 2^8=66$, $C=-30$

Ответ: номер верного ответа 3.

3.4.Укажите функцию $y=f(x)$, если известно, что ее производная имеет вид $f'(x)=\frac{2+x^3}{x^2}$, и верно равенство $f(2)=3$.

1) $f(x)=\frac{6}{x^2}+\frac{3}{4}x$

2) $f(x)=-\frac{2}{x}+\frac{x^2}{2}+2$

3) $f(x)=-\frac{6}{x^2}+\frac{3}{4}x+3$

4) $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{x^2}{2}+4$

Решение: Так как известна производная $y=f'(x)$, то для нахождения функции
$y=f(x)$ неоюходимо найти первообразную функции $y=f'(x)$. Для этого преобразуем данную производную к виду $f'(x)=2x^{-2}+x$.

Тогда первообразная имеет вид $f'(x)=-2x^{-1}+\frac{x^2}{2}+C$ или $f(x)=-\frac{2}{x}+\frac{x^2}{2}+C$. Так как верно равенство $f(2)=3$, а $f(2)=1+C$, то 1+C=3, тогда C=2. Таким образом, искомая функция имеет вид $f(x)=-\frac{2}{x}+\frac{x^2}{2}+2$.

Ответ: номер верного ответа 2.

3.5.Найдите первообразную функции $f(x)=\frac{4}{4x+5}$

1) $F(x)=\frac{1}{4x+5}+2$

3) $F(x)=\frac{1}{16x+20}+5$

2) F(x) = $ln|4x+5|$ +4   4) F(x) = $\frac{1}{4}\ ln|4x+5|$ +3

Решение. Воспользуемся правилом нахождения первообразной для функции

y= f (ax+b). Здесь a=4, b=5, тогда:) F (x) = $\frac{1}{4}\cdot 4ln|4x+5|$ +C или F(x) = $ln|4x+5|$ +C. При этом из производных является F(x) = $ln|4x+5|$ +4 .

Ответ: номер верного ответа 2.

3.6.Для функции f(x)= $\sin(\frac{3\pi}{4}-x)$ найдите первообразную, для которой выполняется равенство F($\frac{\pi}{4}$)=5.

1) F(x)= $\cos(\frac{3\pi}{4}-x)$ +5   3) F(x)=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$cosx$-\frac{\sqrt{2}}{2}$sinx $+\ 6$

2) F(x)= $-\cos(\frac{3\pi}{4}-x)$ +5   4) F(x)=$\frac{\sqrt{2}}{2}$cosx+$\frac{\sqrt{2}}{2}$sinx $+\ 4$

Решение. F(x)= $-(-\cos(\frac{3\pi}{4}-x))$+C,

F(x)= $\cos(\frac{3\pi}{4}-x)$ +C. из условия F($\frac{\pi}{4}$)=5найдем C.

F($\frac{\pi}{4}$)= $\cos(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4})$ +C=5

$\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right)+\mathrm{C}=5,$

C=5.

Следовательно , F(x)= $\cos(\frac{3\pi}{4}-x)$ +5

Ответ: номер верного ответа 1.

3.7. Тело движется прямолинейно, и его скорость изменяется по закону v(t)=9t^2-4.

В момент времени t тело находится на расстоянии s=21 от начала отсчета. Укажите формулу, которой задается зависимость расстояние от времени.

1) s(t)=3t^3−3t+2   3) s(t)=3t^3−4t+5

2) s(t)=3t^3−4t   4) s(t)=3t^3−4t+21

Решение. Известно, что скорость тела в произвольный момент времени есть производная уравнения движения, т.е. $s'(t)=v(t)$.В условии дано уравнение скорости тела, поэтому чтобы определить зависимость расстояния от времени, необходимо найти первообразную для уравнения скорости: $s(t)=3t^3-4t+C$

Так как в момент времени $t=2$ тело находится на расстоянии $s=21$ от начала отсчета, то выполняется равенство $s(2)=21$, $3\cdot 2^3-8+C=21$, $C=5$. Значит, окончательно

$s(t)=3t^3-4t+5$.

Ответ: номер верного ответа 3.

Задания для самостоятельной работы.

3.8.Найти первообразную функции $f(x)=6x^3-5x^2+7$

1) $F(x)=\frac{3}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3+7x$
3) $F(x)=\frac{3}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3+7x+5$
2) $F(x)=18x^2+10x+C$
4) $F(x)=2x^4-\frac{5}{2}x^3+7x+C$

3.9.Найти первообразную функции $f(x)=5x^4-7x+2+x^2$

1) $F(x)=20x^3-7-2x+6$
3) $F(x)=x^5-\frac{7}{2}x^2+2x-\frac{x^3}{2}+10$
2) $F(x)=\frac{5}{4}x^5-7x^2+2x-\frac{x^3}{2}+C$
4) $F(x)=x^5-\frac{7}{2}x^2+2x-\frac{x^3}{2}+\cos\pi$

3.10.Найдите первообразную функции $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x}-4\sin x}$

1) $F(x)=-\frac{1}{x^2}+4\cos x+C$
3) $F(x)=-\frac{1}{x^2}-4\cos x+C$
2) $F(x)=\ln|x|+4\cos x+C$
4) $F(x)=\ln|x|-4\cos x+C$

3.11.Найдите первообразную функции $\mathbf{f(x)=2^x+\frac{1}{\cos^2 x}+2}$

1) $F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}+tgx+2x+2$
3) $F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}-tgx+2x+4$
2) $F(x)=2^x\ln 2+tgx+2x+5$
4) $F(x)=2^x\ln 2+tgx+2$

3.12. Для функции $\mathbf{f(x)=2x-\frac{1}{4x}}$ **найдите первообразную y= F(x), график которой проходит через точку** $\mathbf{M(e^2;e^4)}$**.**

1) $F(x)=x^2+\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{2}$ 3) $F(x)=x^2-\frac{1}{4}\ln|4x|+2\text{-}2\ln 2$

2) $F(x)=x^2-\frac{1}{4}\ln|4x|-2+2\ln 2$ 4) $F(x)=x^2-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{1}{2}$

3.13. Найдите функцию $f(x)$, если производная имеет вид $f'(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{x^3}+\frac{1}{3}$, и верно равенство $f(x)=\frac{5}{8}$

1) $f(x)=x^2+\frac{15}{x^5}-\frac{128}{5}$ 3) $f(x)=x^2-\frac{15}{x^5}-9$

2) $f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{5}{2x^2}+\frac{x}{3}-$ 4) $f(x)=\frac{x^4}{12}+\frac{5}{2x^2}+\frac{x}{3}-2$

3.14.Для функции $f(x)=\frac{2-x^3}{x^3}$ найдите первообразную y= F(x), для которой выполняется равенство F(2)= $\frac{3}{4}$

1) $F(x)=-\frac{1}{x^2}-x+3$ 3) $F(x)=-\frac{1}{x^2}-x+\frac{5}{2}$

3) $F(x)=-\frac{4}{x^2}-x+\frac{15}{4}$ 4) $F(x)=-\frac{1}{x^2}+1$

3.15. Найдите функцию $f(x)$, если производная имеет вид **$f'(x)=sin^2\frac{x}{2}$ и верно равенство $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$**

1) $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}sinx-\frac{3\pi}{4}$ 2) $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}sinx+\frac{1}{2}$

3) $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}sinx+\frac{3\pi}{4}$ 4) $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}sinx-\frac{1}{2}$

3.16. Тело движется прямолинейно, и его скорость изменяется по закону v(t)= 2t+4. В момент времени t=3 тело находится на расстоянии s=21 от начала отсчета. Укажите формулу, которой задается зависимость расстояния от времени.

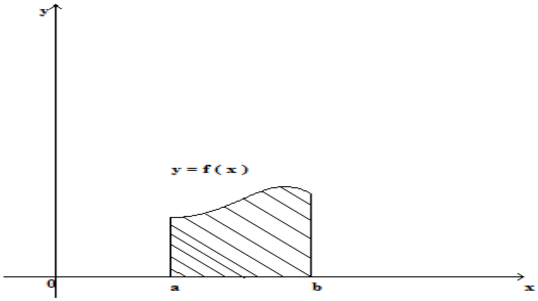
1) $s(t)=t^2+4t$ 3) $s(t)=t^2+4t+21$

2) $s(t)=2t^2+4t-9$ 4) $s(t)=t^2+4t+3$

3.2. Определенный интеграл.

Задача о площади криволинейной трапеции.

Пусть на отрезке [a; b] оси Ох задана непрерывная функция y=f(x), не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком [a; b] и прямыми x=a и x= b называют **криволинейной трапецией**.

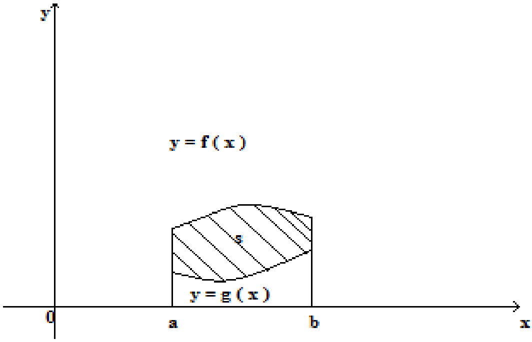


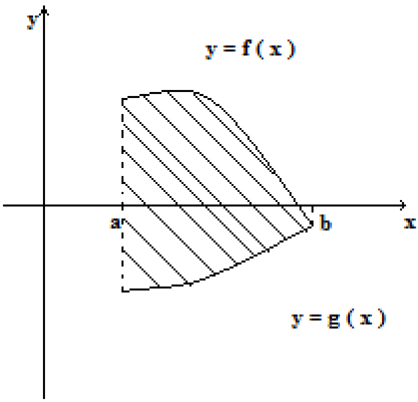
Если $f(x)\geq 0$ на отрезке [a; b], то площадь S соответствующей криволинейной трапеции вычисляется по формуле $S=\int_a^b f(x)dx$, где $\int_a^b f(x)dx$- непрерывной функции определенный интеграл y=f(x) по отрезку [a; b]. Числа, a и b называют пределами интегрирования (соответственно нижним и верхним).

Для вычисления определенного интервала применяется **формула Ньютона – Лейбница:** если функция y=f(x) непрерывна и y= F(x)- ее производная, то верно равенство, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. На практике вместо записи $F(b) - F(a)$ используют обозначение $F(x)\ |_a^b$, тогда формула Ньютона – Лейбница перепишется в виде $\int_a^b f(x)dx = F(x)\ |_a^b$.

Для вычисления площади криволинейной трапеции, образованной графиками функций, применяется следующая теорема.

Теорема3.2. Площадь фигуры, ограниченной прямыми x=a, y= b и графиком функций y= f(x), g(x)



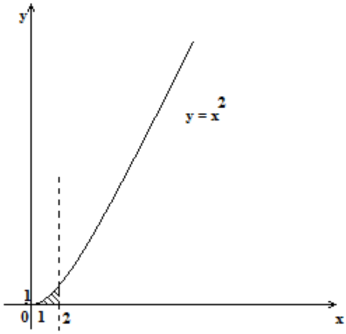


непрерывных на отрезке [a; b] и таких, что f(x) ≤ g(x) для всех x ∈[a; b], вычисляется по формуле S=$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$.

Физический смысл определенного интеграла.

Перемещение s материальной точки, движущейся прямолинейно со скоростью v=v(t),за интервал времени от t= a до t=b вычисляется по формуле s=$\int_a^b$ v(t)dt/

3.17. Вычислите площадь фигуры, изображенной на рисунке



1)$\frac{16}{3}$ 2)4 3) $\frac{8}{3}$ 4) 8

Решение. Фигура ограничена графиком функции $y=x^2$ и осью абсцисс. Пределы интегрирования x=0, x=2. Тогда искомая площадь $S=\int_0^2 x^2dx$.

По формуле Ньютона – Лейбница $\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2$, подставим пределы интегрирования

$\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{2^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{8}{3}$

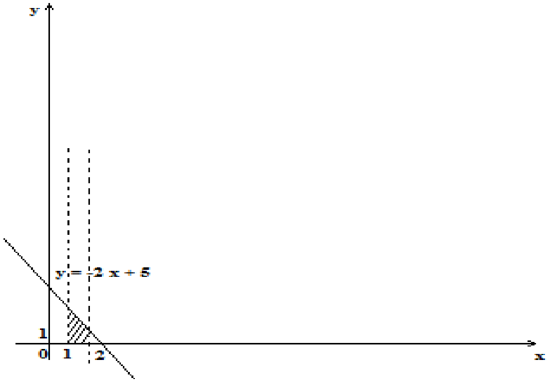
Значит, площадь $S=\frac{8}{3}$

Ответ: номер верного ответа 3.

3.18. Найдите площадь фигуры ограниченной линиями y=−2x+5, x=1, x=2 и осью Ox

1)2 2)4 3) 6 4) $\frac{1}{2}$

Решение. Построим графики указанных линий. Получившуюся внутри область заштрихуем.



Очевидно, что пределы интегрирования x=1 и x=2, а область ограничена линией

y=−2x+5 и осью Ox, поэтому площадь найдем как

S=$\int_1^2(-2x+5)dx$.

Найдем первообразную и по формуле Ньютона – Лейбница получим

$\int_1^2(-2x+5)dx$ =$(-x^2+5x)\Big|_1^2$=(−4+10) − (−1+5)=2 т.е. S=2.

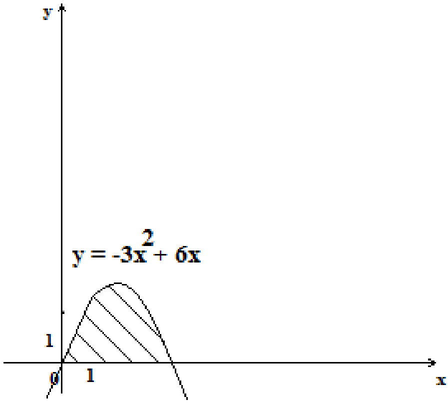
Ответ: номер верного ответа 1.

3.19. Найдите площадь фигуры, ограниченная линиями y=-3x^2+6x и y=0.

1)2 2)16 3) 4 4) 8

Решение. Найдём точки пересечения параболы $y=-3x^2+6x$ с осью Ox. Для этого решим уравнение $-3x^2+6x=0$, тогда x=0, x=2.

Построим эскиз графика функции $y=-3x^2+6x$,



тогда площадь фигуры:S=$\int_1^2(-3x^2+6x)dx$. По формуле Ньютона – Лейбница имеем

$\int_1^2(-3x^2+6x)dx = (-\text{x}^3+3x^2)\ \Big|_0^2$=4, т.е. S=4.

Ответ: номер верного ответа 4.

3.20. Найдите площадь фигуры, ограниченная линиями $\mathbf{y=(x-3)^2, y=0, x=6}$.

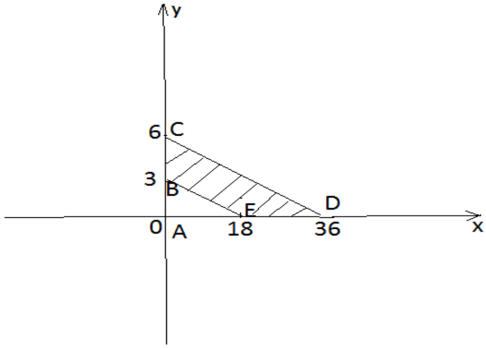
Решение. Параболы y=$(\text{x}-3)^2$ касается оси абсцисс в точке x=3 –это и будет нижний предел интегрирования. Тогда площадь фигуры S=$\int_3^6(\text{x}-3)^2dx = \frac{(\text{x}-3)^3}{3}\ \Big|_3^6$=

$= \frac{(6-3)^3}{3}$ - $\frac{(3-3)^3}{3}$ =9.

Ответ:9

3.21.Найдите площадь четырехугольника, ограниченного линиями $\mathbf{\frac{x}{3}+2y=12, \frac{x}{3}+2y=6}$ и осями координат.

Решение. Для вычисления площади построим четырехугольник. Выразим y в обоих уравнениях: y=6$-\frac{\text{x}}{6}$, y=3$-\frac{\text{x}}{6}$ и построим графики прямых.



Чтобы найти искомую площадь S, найдем площади треугольников ACD и ABE, затем найдем S= $S_{\Delta ACD} - S_{\Delta ABE}$.Площади треугольников можно найти несколькими способами: геометрическим и с применением интегралов.

1.Геометрический способ. Прямая y=6$-\frac{x}{6}$ пересекает ось Ox при x=36, а ось Oy- при

x=6. Таким образом, $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\cdot 36\cdot 6 = 108$. Прямая y=3- $\frac{x}{6}$ пересекает ось Ox при x=18, а ось Oy- при y=3.Значит

$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}\cdot 18\cdot 3 = 27$.

2.Применим определенный интеграл для вычисления обеих площадей

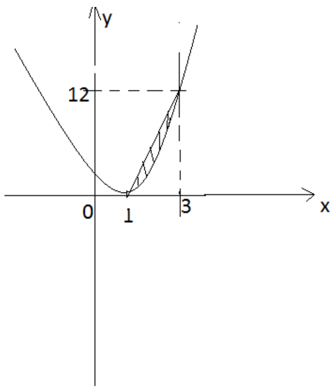
$S_{\Delta ACD} = \int_0^{36}(6 - \frac{x}{6})\,dx = (6x - \frac{x^2}{12})\Big|_0^{36} = 216 - 108 = 108$

$S_{\Delta ABE} = \int_0^{18}(3 - \frac{x}{6})\,dx = (3x - \frac{x^2}{12})\Big|_0^{18} = 54 - 27 = 27$. Таким образом, площадь четырехугольника S=108−27=81.

Ответ: 81.

3.22.Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции f(x)= $3x^2 - 6x + 3$ и графиком ее производной f′(x).

Решение. Найдем производную функции f′(x)=6x−6. Построим эскиз фигуры, ограниченной графиком данных функций.



Чтобы вычислить площадь, найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x)=3x^2-6x+3$ и $f'(x)=6x-6$. Решим уравнение $3x^2-6x+3=6x-6$,

$3x^2-12x+9=0$

$x^2-4x+3=0$, $x_1=1$, $x_2=3$.

Вычислим площадь: $S=\int_1^3((6x-6)-(3x^2-6x+3))dx=\int_1^3(-3x^2+12x-9)\,dx=(-x^3+3x^2-9x)\Big|_1^3=(-27+54-27)-(-1+6-9)=4$

Ответ:4.

Задания для самостоятельной работы.

3.23. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $x=2$, $x=-1$ и осью Ox

1) 6 2) $3\frac{1}{3}$ 3) $2\frac{2}{3}$ 4) $8\frac{1}{3}$

3.24.Найдите площадь фигуры ограниченной линиями $y=2x^2-1$, $x=1$, $x=3$ $y=0$

1) $16\frac{2}{3}$ 2) $15\frac{1}{3}$ 3) $21\frac{2}{3}$ 4) $14\frac{1}{3}$

3.24. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2^x$, $x=0$, $x=4$ и осью Ox

1) $\frac{16}{\ln 2}$ 2) $\frac{8}{\ln 2}$ 3) $16\ln 2$ 4) $\frac{15}{\ln 2}$

3.25. Найдите площадь фигуры ограниченной линиями $y=0,5x^2-2x+3$, $y=7-x$

3.26. Найдите площадь фигуры ограниченной графиком функции $y=4-3x-x^2$, и прямой $y=-2x+2$

3.27. Найдите площадь фигуры ограниченной линиями $y=3\sqrt{x}$, $x=4$, $x=9$, $y=0$.

3.28 Найдите площадь фигуры ограниченной линиями $y=6x^2$, $y=6\sqrt{x}$.

3.29.Найдите площадь фигуры ограниченной линиями $y=-6x^2+3x$, $y=-3$.

3.30. Фигура, ограниченная линиями $y=x+2$, $x=3$,$y=0$, делится линией $y=x^2-2x+2$ на две части. Найдите площадь наибольшей из частей.

Литература

1.Дадаян, А.А. Математика: учебник/ А.А, Дадаян. – М.: Форум, 2014

2.Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учеб. пособие/ А.А. Дадаян. – М.: Форум: ИНФРА-М, 2011

3.Башмаков, М.И. Математика: учебник / М.И. Башмаков. – М.: Академия, 2015. – 256 с

4.Башмаков, М.И. Математика. Задачник: учебное пособие / М.И. Башмаков. – М.: Академия, 2014. – 416 с.

5.Богомолов Н.В. Математика: учеб. для ссузов. – М., 2014.

6.Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие для ссузов. – М., 2003.

7.Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов. – М., 2013.

8.Богомолов Н.В. Дидактический материал по математике.

5. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высшая школа,2010

6.Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. - М.: Высшая школа, 2010

7.Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа, 2012 т.1.

8.Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов. М.1999.

9.Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. - М.1998.

10.Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. – М.: Дело, 2001.