МИНОБРНАУКИ РОССИИ
политехнический колледж филиала федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Майкопский государственный технологический университет» в п. Яблоновском

Методические рекомендации по выполнению практических работ по дисциплине Математика

Раздел: Матрицы и определители. Решение систем линейных уравнений.

форма обучения- очная

Яблоновский, 2020

УДК 51(07)
ББК 22.1
М-54

Одобрено предметной (цикловой) цикловой комиссией информационных и математических дисциплин

Разработчик: Шартан Р.Я.– преподаватель первой категории политехнического колледжа филиала федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Майкопский государственный технологический университет» в п. Яблоновском

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению практических работ составлены в помощь студентам. Дисциплина «Математика» входит в обязательную часть математического и общего естественно - научного цикла, изучается специальностями среднего профессионального образования.

Основная задача обучения математике – обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества для изучения смежных дисциплин.

Программой предусмотрено дальнейшее вооружение студентов математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения специальных дисциплин, разработки курсовых и дипломных проектов, для профессиональной деятельности и продолжения образования.

Задачами данного курса являются:

- усвоение основ математических знаний (теорем, определений, формул);
- формирование умений, навыков студентов на основе полученных знаний;
- развитие интереса студентов к предмету и стимулирование их познавательной активности.

Основными идеями, проходящими весь курс, являются:

- приобретение ряда общих умений необходимых для успешного усвоения математики;
- использование математических знаний при изучении общетехнических и специальных дисциплин, в курсовом и дипломном проектировании.

Особое значение для развития математического мышления студентов имеют практические упражнения, во время которых студент должен уметь:

- проводить сложные и несложные дедуктивные рассуждения;
- обосновывать с разумной степенью полноты решения задач и письменно оформлять их;
- формулировать на математическом языке несложные задачи прикладного характера и интерпретировать полученные результаты;
- пользоваться электронно-вычислительной техникой при решении математических задач;
- пользоваться справочной литературой.

Матрицы. Операции над матрицами.

Определение1. Прямоугольная таблица чисел вида

$$A=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ a_{31}a_{32}\dots a_{mn} \end{vmatrix}$$ называется матрицей. Здесь a_{ij} – действительные числа (i=1, 2,…m, j=1, 2, …n), называются элементами матрицы, i и j – соответственно индексы строки и столбца. При этом произведение m × n число строк и столбцов называют размером матрицы A.

Определение 2. Две матрицы A и B называются равными (A=B), если они имеют одинаковые размеры и соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij,}$

i=1, 2,…m, j=1, 2, …n.

Линейные операции над матрицами.

1.Сумма матриц. Суммой матриц Аи B одинаковый размер называется матрица C того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11}b_{12}\dots b_{1n} \\ b_{21}b_{22}\dots b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots. \\ b_{m1}b_{m2}\dots b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11}b_{12}\dots b_{1n} \\ b_{21}b_{22}\dots b_{2n} \\ b_{m1}b_{m2}\dots b_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\ \dots & a_{1n}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1+}\ b_{m1} & a_{m2}+b_{m1}\dots & a_{mn}+\ b_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример1. Вычислить сумму двух матриц.

Решение:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

A+B=$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -2+7 & 3+3 & 3+0 \\ 0+6 & -1+(-1) & 2+5 \\ 3+7 & 4+5 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 10 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

2. Умножение матрицы на действительное число. Произведением матрицы A на число α называется матрица , каждый элемент которой получен умножением соответствующего элемента матрицы A на число α.

A= $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$,

A α= $\begin{pmatrix} \alpha a_{11} \quad \alpha a_{12} \dots \ \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} \quad \alpha a_{22} \dots \ \alpha a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots.. \\ \alpha a_{m1} \quad \alpha a_{m2} \dots \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$

Пример2. Найти произведение матрицы A на число $\boldsymbol{\alpha = 3}$

A=$\begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Решение:

αA= $3\begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7*3 & 3*3 & 0*3 \\ 6*3 & -1*3 & 5*3 \\ 7*3 & 5*3 & 2*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 9 & 0 \\ 18 & -3 & 15 \\ 21 & 15 & 6 \end{pmatrix}$

3. Транспонирование матрицы. Транспонированием матрицы называется замена строк матрицы на ее столбцы с сохранением их порядка (или, что-то же самое, замена столбцов матрицы на ее строки). Пусть дана исходная матрица A:

A=$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix}$,тогда , согласно определению ,

транспонированная матрица A′=$\begin{pmatrix} a_{11}a_{21}\dots a_{m1} \\ a_{12}a_{22}\dots a_{m2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{1n}a_{2n}\dots a_{mn} \end{pmatrix}$.

Пример 3. Даны матрицы A и B:

A=$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. Записать соответствующие транспонированные матрицы.

Решение:

A′=$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, B′=$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

4.Умножение матрицы. Пусть даны матрицы A= $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix}$ и B= $\begin{pmatrix} b_{11}b_{12}\dots b_{1k} \\ b_{21}b_{22}\dots b_{2k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{n1}b_{n2}\dots b_{nk} \end{pmatrix}$.

Произведение матрицы A и B называется матрица C, элементы которой c_{ij} равны скалярным произведениям векторов – строк a_i матрицы A на вектор – столбцы b_j матрицы B.

$$C= AB=\|c_{ij}\|,\ c_{ij} = a_i b_j=\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$$

I=1,2,…,m, j= 1,2,...,k.

Пример 4. A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Поскольку число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то произведение матриц AB имеет смысл. По формулам

$$C= AB=\|c_{ij}\|,\ c_{ij} = a_i b_j=\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$$

I=1,2,…,m, j= 1,2,...,k. Получаем в произведении матрицу размером 3×2:

$$AB=\begin{pmatrix} 1\cdot 0+(-1)\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 1+2\cdot(-2) \\ 0\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 2 & 0\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot(-2) \\ 1\cdot 0+4\cdot 1+1\cdot 2 & 1\cdot 1+4\cdot 1+1\cdot(-2) \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Произведение ВА не имеет смысла, так как число столбцов матрицы В не совпадает с числом строк матрицы А.

Пример 5. А= $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$, **В=** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$**.**

Решение: Здесь мы найдем произведение данных матриц АВ и ВА:

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 5 & 2\cdot 0+3\cdot(-2) \\ 4\cdot 1+(-1)\cdot 5 & 4\cdot 0+(-1)\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 2+0\cdot 4 & 1\cdot 3+0\cdot(-1) \\ 5\cdot 2+(-2)\cdot 4 & 5\cdot 3+(-2)\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

Как видно из результата, матрица произведения зависит от порядка расположения матриц в произведении. В обоих случаях произведения матриц имеют тот же размер, что и у исходных сомножителей: 2×2.

Свойства произведений матриц.

Пусть А, В, С – матрицы соответствующих размеров (чтобы произведение матриц были определены), а α- действительное число. Тогда следующие свойства произведения матриц имеют место:

1) (АВ) С=А(ВС),

2) (А+В) С = АС+ВС,

3)А(В+С) = АВ+АС,

4) α(АВ)=(αА)В =А(αВ),

5) АЕ=А $\qquad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$-единичная матрица,

6) ЕА=Аα.

Выполните упражнения:

6. Найти произведение матриц АВ и ВА, если А= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

B=$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Вычислить матрицу Д= AB -C^2, если A=$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$,

C=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Найти произведение матриц ABC, если A=$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$,

B= $\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -128 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить матрицу Д=ABC – 3E, где A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

C=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, E - единичная матрица.

Определители квадратных матриц. Обратная матрица.

Определителем матрицы первого порядка A =(a_{ij}), или определителем первого порядка, называется элемент a_{11}

$$\triangle_{\mathbf{1}} = |A| = a_{11}.$$

Определителем матрицы второго порядка A =(a_{ij}), или определителем второго порядка, называется число, которое вычисляется по формуле

$$\triangle_{\mathbf{2}} = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Например: A= $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

Решение: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 10 - 3 = 7.$

Определителем матрицы третьего порядка A =(a_{ij}), или определителем третьего порядка, называется число, которое вычисляется по формуле

$$\triangle_{\mathbf{3}} = |A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Например: Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$**.**

Решение:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$=$1\cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot -1 \cdot 1 \cdot 1 -$ $(-1) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1$=2-1+2-1+4-1=5

1. **Вычислить определители: а)**$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2-} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$**;** $\begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{9} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{vmatrix}$**.**

Пусть дана квадратная матрица А n-го порядка

А=$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{31}a_{32} \dots a_{mn} \end{vmatrix}$.

Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} *матрицы n-го порядка* называется определитель матрицы (n-1) го порядка, полученной из матрицы А вычеркивание i-й строки j- го столбца.

Например, Минором элемента a_{12} матрицы А третьего порядка будет

M_{12}=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$=$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$= $a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij}матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

$\mathrm{A}_{ij} = \quad (-1)^{i+j} \cdot \mathrm{M}_{ij}$ т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца (i+j)- четное число, и отличается от минора знаком, когда (i+j)- нечетное число.

Пример: Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Решение.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 1) = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 - 1 = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3.$$

Обратная матрица. Алгоритм вычисления обратной матрицы.

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1.Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A – вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратной матрицы A^{-1} существует.

2.Находим матрицу A', транспонированную к A.

3.Находим алгебраические дополнения элементов, транспонированной ·2матрицу $\widetilde{A}$:$\widetilde{a_{ij}} = A'_{ij} = A_{ij}$, (i =1,2,…n; j=1,2,…n).

4.Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{A} \cdot \widetilde{A}\ (|A| \neq 0)$

5.Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Пример: Найти матрицу обратную к данной $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

1. Находим определитель матрицы $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$=1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$
$$= 2 - 1 + 2 - 1 + 4 - 1 = 5 \neq 0$$

2.Находим матрицу A', транспонированную к А. Для этого находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1=1$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 1) = -2$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 - 1 = -2$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3.$$

3. $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$4.\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\widetilde{A}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

Пример: Определить , имеет ли матрица А обратную, и если имеет, то вычислите ее А=$\begin{pmatrix}4 & -8 & -5\\ -4 & 7 & -1\\ -3 & 5 & 1\end{pmatrix}$.

Решение систем трех линейных уравнений с тремя переменными методом Крамера.

Система трех линейных уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3,\end{cases}$$

при условии, что определитель системы, $\triangle=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0$

имеет единственное решение, находится по формулам Крамера.

Х= $\frac{\triangle x}{\triangle}$**;** У= $\frac{\triangle y}{\triangle}$ Z= $\frac{\triangle z}{\triangle}$, где

$\triangle x=\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_2 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$; $\cdot\triangle y=\begin{vmatrix}a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_2 & c_3\end{vmatrix}$; $\triangle z=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_2\end{vmatrix}$

Если же $\triangle=0$, то система является, либо неопределенной, либо несовместной. В том случае , если система однородная , т.е имеет вид $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z=0,\\ a_3x+b_3y+c_3z=0,\end{cases}$ и $\triangle\neq 0$, то она имеет единственное решение х=0,у=0, $z=0$.

Если определитель однородной системы $\triangle=0$, то система сводится, либо к двум независимым уравнениям (третье является следствием), либо к одному (следствием которого являются остальные два уравнения). В обеих случаях однородная система имеет бесконечное множество решений.

Пример1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 7x - 3y + 5z = 32, \\ 5x + 2y + z = 11, \\ 2x - y + 3z = 14. \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель системы $\triangle = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$

$= 7 \cdot 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \cdot 2 + 5 - (-1) \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot 7 = 42 - 6 - 25 - 20 + 45 + 7 + 43 \neq 0.$

$\triangle$ x=$\begin{vmatrix} 32 & -3 & 5 \\ 11 & 2 & 1 \\ 14 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 32 \cdot 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \cdot 14 + 11 \cdot (-1) \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 14 - 11 \cdot (-3) \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot 32 = 192 - 42 - 55 - 140 + 99 + 32 = 86.$

$\triangle$ y = $\begin{vmatrix} 7 & 32 & 5 \\ 5 & 11 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix}$ =7·11·3+32·1·2+5·14·5-5·11·2-32·5·3-14·1·7=231+64+351-110-480-98=-43.

$\triangle z = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 32 \\ 5 & 2 & 11 \\ 2 & -1 & 14 \end{vmatrix}$ = 7·2·14+(-3) ·11·2+5· (-1·32-32·2·2-5· (-3) ·14-(-1) ·11·7=156-66-160-128+210+77=129.

X= $\frac{\triangle x}{\triangle} = \frac{86}{43}$=2**;** У= $\frac{\triangle y}{\triangle} = \frac{-43}{43}$=-1; Z= $\frac{\triangle z}{\triangle}$=$\frac{129}{43} = 3.$

Проверка: $\begin{cases} 7 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 = 32 \\ 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 11 \\ 2 \cdot 2 + 1 + 3 \cdot 3 = 14 \end{cases}$

Ответ: (2; -1; 3).

2. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$ Ответ: (4;2;1).

б) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$ Ответ: (8;4;2)

в) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 10, \\ x + 5y - 2z = -15, \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases}$ Ответ: (-1;-2;3) г) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$ Ответ: (1;-3;0).

д) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ -3\ \ x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$ Ответ: (-2;1;-1).

е) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -11, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -8, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$ Ответ: (-11;-8;7)

Решение систем трех линейных уравнений с тремя переменными методом Гаусса.

Методом Гаусса является способ решения линейных уравнений путем последовательного исключения переменных и сведения ее к треугольной системе уравнений.

Подробно и последовательно изложим решение системы трех линейных уравнений с тремя переменными методом Гаусса на примере системы уравнений: $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$

Выпишем расширенную матрицу данной системы и приведем ее к трапециевидной форме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & 17 & -13 & 15 \\ 0 & -5 & 10 & -51 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & -5 & 10 & 15 \\ 0 & 17 & -13 & -51 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 17 & -13 & -51 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 21 & 0 \end{array}\right)$$

Запишем систему, соответствующую этой трапециевидной матрице и решим ее методом обратного хода.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 13, \\ -x_2 + 2x_3 = 3, \\ 21x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13 - 3x_3 + 4x_2, \\ x_{2=} - 3 + 2x_3, \\ x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13 - 3x_3 + 4x_2, \\ x_{2=} - 3 + 2x_3, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_1 = 13 - 3x_3 + 4x_2, \\ x_{2=} - 3 + 2 * 0, \\ x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} x_1 = 13 - 3x_3 + 4x_2, \\ x_{2=} - 3, \\ x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} x_1 = 13 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (- \\ x_{2=} - 3, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{2=} - 3, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Проверка $\begin{cases} 1 + 12 + 0 = 13 \\ 4 - 3 - 0 = 1 \\ -2 - 9 + 0 = -11. \end{cases}$ Ответ: (1;-3;0)

Решите системы линейных уравнений методом Гаусса.

1) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -9, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$ Ответ: (-1;1;-1)

2) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$ Ответ: (-1,5; 8; 23,5)

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$ Ответ: (-1;-3;2).

4) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$ Ответ: (1;-3;0).

5) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ -3 \quad x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$ Ответ: (-2;1;-1).

6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -11, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -8, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$ Ответ: (-11;-8;7).

7) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$ Ответ: (-1;0;1)

8) $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -8, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -9, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$ Ответ: (-3;2;4).

Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.

Пусть дана система трех линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Решением системы линейных уравнений методом обратной матрицы определяется по формуле X= $A^{-1} \cdot B$,

где A^{-1}-обратная матрица матрицы $|A|$, B = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Пример1: Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$$

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -15+24-12-27-20-8=-58$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-10 + 12) = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4-9=-13$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -(10 + 6) = -16$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-5 - 9) = -14$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}|-2| = -(-2 + 6) = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(-4 - 6) = 10$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7.$$

3. $A^{-1} = -\frac{1}{58}\begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{58} & \frac{16}{58} & \frac{1}{58} \\ \frac{2}{58} & \frac{14}{58} & -\frac{10}{58} \\ \frac{13}{58} & \frac{4}{58} & -\frac{7}{58} \end{pmatrix}$

$X = A^{-1} \cdot B$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{23}{58} & \frac{16}{58} & \frac{1}{58} \\ \frac{2}{58} & \frac{14}{58} & -\frac{10}{58} \\ \frac{13}{58} & \frac{4}{58} & -\frac{7}{58} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{23}{58}\cdot 6 + & \frac{16}{58}\cdot 20 & + \frac{1}{58}\cdot 6 \\ \frac{2}{58}\cdot 6 + & \frac{14}{58}\cdot 20 & -\frac{10}{58}\cdot 6 \\ \frac{13}{58}\cdot 6 + & \frac{4}{58}\cdot 20 & -\frac{7}{58}\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{138+320+6}{58} \\ \frac{12+280-60}{58} \\ \frac{78+80-42}{58} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 8, y = 4, z = 2.$

Решите систему линейных уравнений методом обратной матрицы
.

1. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 10, \\ x + 5y - 2z = -15, \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases}$ Ответ: (1.-2,3).

2. $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2, \\ 4x + 3y + 2z = 16, \\ 2x - 3y + z = 17. \end{cases}$ Ответ: (8,4,2).

3. $\begin{cases} x - 2y - z = 2, \\ 3x - 6y - 3z = 6, \\ 5x - 10y - 5z = 10. \end{cases}$ Ответ: б.м.р.

4. $\begin{cases} 5x - 3y + 4z = 6, \\ 2x - y - z = 0, \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$ Ответ: (1,1,1).

Литература

1.Дадаян, А.А. Математика: учебник/ А.А, Дадаян. – М.: Форум, 2014

2.Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учеб. пособие/ А.А. Дадаян. – М.: Форум: ИНФРА-М, 2011

3.Башмаков, М.И. Математика: учебник / М.И. Башмаков. – М.: Академия, 2015. – 256 с

4.Башмаков, М.И. Математика. Задачник: учебное пособие / М.И. Башмаков. – М.: Академия, 2014. – 416 с.

5.Богомолов Н.В. Математика: учеб. для ссузов. – М., 2014.

6.Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие для ссузов. – М., 2003.

7.Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов. – М., 2013.

8.Богомолов Н.В. Дидактический материал по математике.

5. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высшая школа,2010

6.Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. - М.: Высшая школа, 2010

7.Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа, 2012 т.1.

8.Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов. М.1999.

9.Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. - М.1998.

10.Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. – М.: Дело, 2001.