

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

политехнический колледж филиала федерального государственного  
бюджетного образовательного учреждения высшего образования  
«Майкопский государственный технологический университет» в п.  
Яблоновском

**Методические рекомендации по выполнению  
практических работ  
по дисциплине Математика**

**Раздел: Матрицы и определители. Решение систем  
линейных уравнений.**

Яблоновский, 2020

УДК 51(07)

ББК 22.1

М-54

Разработчик: Шартан Р.Я.– преподаватель первой категории политехнического колледжа филиала федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Майкопский государственный технологический университет» в п. Яблоновском

Одобрено предметной (цикловой) комиссией информационных и математических дисциплин

Протокол от 04.12.2020г №4

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению практических работ составлены в помощь студентам. Дисциплина «Математика» входит в обязательную часть математического и общего естественно - научного цикла, изучается специальностями среднего профессионального образования.

Основная задача обучения математике – обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества для изучения смежных дисциплин.

Программой предусмотрено дальнейшее вооружение студентов математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения специальных дисциплин, разработки курсовых и дипломных проектов, для профессиональной деятельности и продолжения образования.

Задачами данного курса являются:

- усвоение основ математических знаний (теорем, определений, формул);
- формирование умений, навыков студентов на основе полученных знаний;
- развитие интереса студентов к предмету и стимулирование их познавательной активности.

Основными идеями, проходящими весь курс, являются:

- приобретение ряда общих умений необходимых для успешного усвоения математики;
- использование математических знаний при изучении общетехнических и специальных дисциплин, в курсовом и дипломном проектировании.

Особое значение для развития математического мышления студентов имеют практические упражнения, во время которых студент должен уметь:

- проводить сложные и несложные дедуктивные рассуждения;
- обосновывать с разумной степенью полноты решения задач и письменно оформлять их;
- формулировать на математическом языке несложные задачи прикладного характера и интерпретировать полученные результаты;
- пользоваться электронно-вычислительной техникой при решении математических задач;
- пользоваться справочной литературой.

## Матрицы. Операции над матрицами.

**Определение 1.** Прямоугольная таблица чисел вида

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \text{ называется матрицей. Здесь } a_{ij} -$$

действительные числа ( $i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n$ ), называются элементами матрицы,  $i$  и  $j$  – соответственно индексы строки и столбца. При этом произведение  $m \times n$  число строк и столбцов называют размером матрицы  $A$ .

**Определение 2.** Две матрицы  $A$  и  $B$  называются равными ( $A=B$ ), если они имеют одинаковые размеры и соответствующие элементы равны:  $a_{ij} = b_{ij}$ ,

$$i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

### Линейные операции над матрицами.

**1. Сумма матриц.** Суммой матриц  $A$  и  $B$  одинаковый размер называется матрица  $C$  того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

**Пример 1.** Вычислить сумму двух матриц.

**Решение:**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2+7 & 3+3 & 3+0 \\ 0+6 & -1+(-1) & 2+5 \\ 3+7 & 4+5 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 10 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

**2. Умножение матрицы на действительное число.** Произведением матрицы  $A$  на число  $\alpha$  называется матрица, каждый элемент которой получен умножением соответствующего элемента матрицы  $A$  на число  $\alpha$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$A \alpha = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Пример 2.** Найти произведение матрицы  $A$  на число  $\alpha = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Решение:**

$$\alpha A = 3 \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7*3 & 3*3 & 0*3 \\ 6*3 & -1*3 & 5*3 \\ 7*3 & 5*3 & 2*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 9 & 0 \\ 18 & -3 & 15 \\ 21 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

**3. Транспонирование матрицы.** Транспонированием матрицы называется замена строк матрицы на ее столбцы с сохранением их порядка (или, что-то же самое, замена столбцов матрицы на ее строки). Пусть дана исходная матрица  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ тогда, согласно определению,}$$

$$\text{транспонированная матрица } A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

**Пример 3.** Даны матрицы A и B:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}. \text{ Записать соответствующие}$$

транспонированные матрицы.

*Решение:*

$$A' = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

**4. Умножение матрицы.** Пусть даны матрицы A =

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы A и B называется матрица C, элементы которой  $c_{ij}$  равны скалярным произведениям векторов – строк  $a_i$  матрицы A на вектор – столбцы  $b_j$  матрицы B.

$$C = AB = \|c_{ij}\|, \quad c_{ij} = a_i b_j = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj} \\ i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,k.$$

$$\text{Пример 4. } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* Поскольку число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то произведение матриц AB имеет смысл. По формулам

$$C = AB = \|c_{ij}\|, \quad c_{ij} = a_i b_j = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}$$

$i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,k.$  Получаем в произведении матрицу размером  $3 \times 2$ :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Произведение  $BA$  не имеет смысла, так как число столбцов матрицы  $B$  не совпадает с числом строк матрицы  $A$ .

**Пример 5.**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ .

**Решение:** Здесь мы найдем произведение данных матриц  $AB$  и  $BA$ :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 & 4 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 & 5 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

Как видно из результата, матрица произведения зависит от порядка расположения матриц в произведении. В обоих случаях произведения матриц имеют тот же размер, что и у исходных сомножителей:  $2 \times 2$ .

### Свойства произведений матриц.

Пусть  $A, B, C$  – матрицы соответствующих размеров (чтобы произведение матриц были определены), а  $\alpha$  – действительное число. Тогда следующие свойства произведения матриц имеют место:

- 1)  $(AB)C = A(BC)$ ,
- 2)  $(A+B)C = AC + BC$ ,
- 3)  $A(B+C) = AB + AC$ ,
- 4)  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ ,

$$5) AE = EA = A \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{—единичная матрица,}$$

$$6) EA = A\alpha.$$

**Выполните упражнения:**

6. Найти произведение матриц  $AB$  и  $BA$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Вычислить матрицу  $D = AB - C^2$ , если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. Найти произведение матриц  $ABC$ , если  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -128 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить матрицу  $D = ABC - 3E$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$C = (2 \ 0 \ 5)$ ,  $E$  - единичная матрица.

### Определители квадратных матриц. Обратная матрица.

Определителем матрицы первого порядка  $A = (a_{ij})$ , или определителем первого порядка, называется элемент  $a_{11}$

$$\Delta_1 = |A| = a_{11}.$$

Определителем матрицы второго порядка  $A = (a_{ij})$ , или определителем второго порядка, называется число, которое вычисляется по формуле

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Например:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

**Решение:**  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 10 - 3 = 7.$

Определителем матрицы третьего порядка  $A = (a_{ij})$ , или определителем третьего порядка, называется число, которое вычисляется по формуле

$$\Delta_3 = |A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$



**Например: Вычислить определитель третьего**

порядка  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ .

**Решение:**

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2 - 1 + 2 - 1 + 4 - 1 = 5$$

1. Вычислить определители: а)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ ;  $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ .

Пусть дана квадратная матрица А n-го порядка

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Минором  $M_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы n-го порядка называется определитель матрицы

(n-1) го порядка, полученной из матрицы А вычеркивание i-й строки j-го столбца.

Например, Минором элемента  $a_{12}$  матрицы А третьего порядка будет

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$$

Алгебраическим дополнением  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком  $(-1)^{i+j}$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$  т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца (i+j)- четное число, и отличается от минора знаком, когда (i+j)- нечетное число.

**Пример: Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Решение.**

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 1) = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3.$$

**Обратная матрица. Алгоритм вычисления обратной матрицы.**

**Определение.** Матрица  $A^{-1}$  называется обратной по отношению к квадратной матрице  $A$ , если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ .

**Алгоритм вычисления обратной матрицы**

1. Находим определитель исходной матрицы. Если  $|A| = 0$ , то матрица  $A$  – вырожденная и обратной матрицы  $A^{-1}$  не существует. Если  $|A| \neq 0$ , то матрица  $A$  – невырожденная и обратной матрицы  $A^{-1}$  существует.

2. Находим матрицу  $A'$ , транспонированную к  $A$ .

3. Находим алгебраические дополнения элементов, транспонированной матрицы  $\tilde{A}: \tilde{a}_{ij} = A'_{ji} = A_{ij}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ).

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$  ( $|A| \neq 0$ )

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы  $A^{-1}$ , исходя из ее определения  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ .

**Пример: Найти матрицу обратную к данной  $A =$**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Решение:**

1. Находим определитель матрицы  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = \\ = 2 - 1 + 2 - 1 + 4 - 1 = 5 \neq 0$$

2. Находим матрицу  $A'$ , транспонированную к  $A$ . Для этого находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 1) = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3.$$

3.  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

$$4. A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Ответ:  $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$

**Пример:** Определить, имеет ли матрица  $A$  обратную, и если

имеет, то вычислите ее  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

**Решение систем трех линейных уравнений с тремя переменными методом Крамера.**

Система трех линейных уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases}$$

при условии, что определитель системы,  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$

имеет единственное решение, находится по формулам Крамера.

$X = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad Y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad Z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$  где

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Если же  $\Delta = 0$ , то система является, либо неопределенной, либо несовместной. В том случае, если система однородная, т.е.

имеет вид  $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0, \end{cases}$  и  $\Delta \neq 0$ , то она имеет единственное

решение  $x=0, y=0, z=0$ .

Если определитель однородной системы  $\Delta = 0$ , то система сводится, либо к двум независимым уравнениям (третье является

следствием), либо к одному (следствием которого являются остальные два уравнения). В обоих случаях однородная система имеет бесконечное множество решений.

**Пример1.** Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 7x - 3y + 5z = 32, \\ 5x + 2y + z = 11, \\ 2x - y + 3z = 14. \end{cases}$$

**Решение.** Вычислим определитель системы  $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$

$$= 7 \cdot 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \cdot 2 + 5 - (-1) \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot 7 = 42 - 6 - 25 - 20 + 45 + 7 + 43 \neq 0.$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 32 & -3 & 5 \\ 11 & 2 & 1 \\ 14 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 32 \cdot 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \cdot 14 + 11 \cdot (-1) \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 14 - 11 \cdot (-3) \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot 32 = 192 - 42 - 55 - 140 + 99 + 32 = 86.$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 7 & 32 & 5 \\ 5 & 11 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 11 \cdot 3 + 32 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 14 \cdot 5 - 5 \cdot 11 \cdot 2 - 32 \cdot 5 \cdot 3 - 14 \cdot 1 \cdot 7 = 231 + 64 + 351 - 110 - 480 - 98 = -43.$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 32 \\ 5 & 2 & 11 \\ 2 & -1 & 14 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot 14 + (-3) \cdot 11 \cdot 2 + 5 \cdot (-1 \cdot 32 - 32 \cdot 2 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) \cdot 14 - (-1) \cdot 11 \cdot 7) = 156 - 66 - 160 - 128 + 210 + 77 = 129.$$

$$X = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{86}{43} = 2; \quad Y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-43}{43} = -1; \quad Z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{129}{43} = 3.$$

$$\text{Проверка: } \begin{cases} 7 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 = 32 \\ 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 11 \\ 2 \cdot 2 + 1 + 3 \cdot 3 = 14 \end{cases}$$

Ответ: (2; -1; 3).

2. Решить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases} \quad \text{Ответ: (4;2;1).}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases} \quad \text{Ответ: (8;4;2)}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3x - 2y + z = 10, \\ x + 5y - 2z = -15, \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases} \quad \text{Ответ: (-1;-2;3)}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (1; -3; 0).$$

$$\text{д) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (-2; 1; -1).$$

$$\text{е) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -11, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -8, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (-11; -8; 7)$$

### Решение систем трех линейных уравнений с тремя переменными методом Гаусса.

Методом Гаусса является способ решения линейных уравнений путем последовательного исключения переменных и сведения ее к треугольной системе уравнений.

Подробно и последовательно изложим решение системы трех линейных уравнений с тремя переменными методом Гаусса на

примере системы уравнений: 
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу данной системы и приведем ее к трапециевидной форме

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & -11 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & 17 & -13 & 15 \\ 0 & -5 & 10 & -51 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & -5 & 10 & 15 \\ 0 & 17 & -13 & -51 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 17 & -13 & -51 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 21 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Запишем систему, соответствующую этой трапециевидной матрице и решим ее методом обратного хода.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 13, \\ -x_2 + 2x_3 = 3, \\ 21x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13 - 3x_3 + 4x_2, \\ x_2 = -3 + 2x_3, \\ x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13 - 3x_3 + 4x_2, \\ x_2 = -3 + 2x_3, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13 - 3x_3 + 4x_2, \\ x_2 = -3 + 2 \cdot 0, \\ x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13 - 3x_3 + 4x_2, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-) \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Проверка} \begin{cases} 1 + 12 + 0 = 13 \\ 4 - 3 - 0 = 1 \\ -2 - 9 + 0 = -11. \end{cases}$$

Ответ: (1;-3;0)

**Решите системы линейных уравнений методом Гаусса.**

$$1) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -9, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (-1;1;-1)$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 4. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (-1,5; 8; 23,5)$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (-1;-3;2).$$

$$4) \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (1;-3;0).$$

$$5) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (-2;1;-1).$$

$$6) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -11, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -8, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (-11;-8;7).$$

$$7) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (-1;0;1)$$

$$8) \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -8, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -9, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (-3;2;4).$$

## Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.

Пусть дана система трех линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Решением системы линейных уравнений методом обратной матрицы определяется по формуле  $X = A^{-1} \cdot B$ ,

$$\text{где } A^{-1}\text{-обратная матрица матрицы } |A|, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

**Пример1: Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.**

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$$

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 24 - 12 - 27 - 20 - 8 = -58$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-10 + 12) = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -(10 + 6) = -16$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-5 - 9) = -14$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} |-2| = -(-2 + 6) = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(-4 - 6) = 10$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7.$$



$$3. \quad A^{-1} = -\frac{1}{58} \begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{58} & \frac{16}{58} & \frac{1}{58} \\ \frac{2}{58} & \frac{14}{58} & -\frac{10}{58} \\ \frac{13}{58} & \frac{4}{58} & -\frac{7}{58} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{23}{58} & \frac{16}{58} & \frac{1}{58} \\ \frac{2}{58} & \frac{14}{58} & -\frac{10}{58} \\ \frac{13}{58} & \frac{4}{58} & -\frac{7}{58} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{23}{58} \cdot 6 + \frac{16}{58} \cdot 20 + \frac{1}{58} \cdot 6 \\ \frac{2}{58} \cdot 6 + \frac{14}{58} \cdot 20 - \frac{10}{58} \cdot 6 \\ \frac{13}{58} \cdot 6 + \frac{4}{58} \cdot 20 - \frac{7}{58} \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{138+320+6}{58} \\ \frac{12+280-60}{58} \\ \frac{78+80-42}{58} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ:  $x = 8, y = 4, z = 2$ .

Решите систему линейных уравнений методом обратной матрицы

$$1. \quad \begin{cases} 3x - 2y + z = 10, \\ x + 5y - 2z = -15, \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (1, -2, 3).$$

$$2. \quad \begin{cases} 5x + y - 3z = -2, \\ 4x + 3y + 2z = 16, \\ 2x - 3y + z = 17. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (8, 4, 2).$$

$$3. \quad \begin{cases} x - 2y - z = 2, \\ 3x - 6y - 3z = 6, \\ 5x - 10y - 5z = 10. \end{cases} \quad \text{Ответ: б.м.р.}$$

$$4. \quad \begin{cases} 5x - 3y + 4z = 6, \\ 2x - y - z = 0, \\ x - 2y + z = 0. \end{cases} \quad \text{Ответ: } (1, 1, 1).$$

## Литература

1. Кочетков, Е. С. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. - Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2020. - 240 с. - ЭБС «Znaniium.com» - Режим доступа: <https://znanium.com/catalog/product/1059112>
2. Башмаков, М.И. Математика [Электронный ресурс]: учебник / Башмаков М.И. - Москва: КноРус, 2020. - 394 с. - ЭБС «BOOK.RU» - Режим доступа: <https://book.ru/book/935689>
3. Шипачев, В. С. Математика [Электронный ресурс]: учебник и практикум / В. С. Шипачев; под ред. А. Н. Тихонова. - Москва: Юрайт, 2020. - 447 с. - ЭБС «Юрайт» - Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/459024>
4. Богомоллов, Н. В. Математика [Электронный ресурс]: учебник / Н. В. Богомоллов, П. И. Самойленко. - Москва: Юрайт, 2020. - 401 с. - ЭБС «Юрайт» - Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/449006>
5. Дорофеева, А. В. Математика [Электронный ресурс]: учебник / А. В. Дорофеева. - Москва: Юрайт, 2020. - 400 с. - ЭБС «Юрайт» - Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/449047>

### Интернет - ресурсы:

- 1 <https://infourok.ru/> –Электронный учебник.
2. <https://siblec.ru/> - Справочник по Высшей математике и электроники.
3. <http://window.edu.ru/> – Единое окно доступа к образовательным ресурсам.
4. <http://matclub.ru/> - Высшая математика, лекции, курсовые, примеры решения задач, интегралы и производные, дифференцирование, производная и первообразная, ТФКП, электронные учебники.
5. <http://www.gouspo.ru/> – Gouspo – Студенческий портал по математике.
6. <https://mathematics.ru/> - Математика в Открытом колледже.

<https://school.msu.ru/> – Консультационный центр по математике преподавателей и выпускников МГУ.

<https://exponenta.ru/> - Образовательный математический сайт.

9. <http://www.mathnet.ru/> - Общероссийский математический портал Math-Net.Ru

<https://www.bymath.net/> Вся элементарная математика: Средняя математическая интернет – школа.