МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Майкопский государственный технологический университет» в поселке Яблоновском

Политехнический колледж

Предметная (цикловая) комиссия информационных и математических дисциплин

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
МАТЕМАТИКА

для студентов 1 курса среднего профессионального образования очной формы обучения

п. Яблоновский,2020

УДК 51(07)
ББК 22.1
М-54

Математика. Методическое пособие по выполнению практических работ для студентов СПО очной формы обучения. /Составитель: Шартан Р.Я.

Данное методическое пособие разработано в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальностям СПО.

Содержание

<u>Практическое занятие №1.</u> Сложение и вычитание двух комплексных чисел.

Цель работы: закрепить навыки выполнения действий с комплексными числами

Сложение двух комплексных чисел выполняются по формуле:

$$(a_1+b_1i) + (a_2+b_2i) = (a_1+a_2) + (b_1+b_2)\,i$$

Пример: Найти сумму двух комплексных чисел $Z_1=3+4i$; $Z_2=-5+3i$.

Решение: $Z_1+Z_2=(3+4i)+(-5+3i)=(3-5)+(4+3)\,i=-2+7\,i$

1.Выполните сложение комплексных чисел (под руководством преподавателя).

1) $Z_1=-3+5i$, $Z_2=4-7i$;
2) $Z_1=-2/3+1/4i$, $Z_2=1/4+5/6i$;
3) $Z_1=-0,6+0,2i$, $Z_2=-0,4-0,5i$;
4) $Z_1=3,6+0,2i$, $Z_2=-1,4-0,2i$.
5) $Z_1=3-0,7i$, $Z_2=-3+0,7i$;
6) $Z_1=-1+3i$, $Z_2=4+5i$.

2.Выполните графически сложение чисел:

1) $Z_1=-1+3i$, $Z_2=4+5i$
2) $Z_1=-1+3i$, $Z_2=4+5i$

Вычитание двух комплексных чисел.

Вычитание двух комплексных чисел определяется как действие обратное сложению.

Вычитание двух комплексных чисел находится по формуле

$$(a_1+b_1i) - (a_2+b_2i) = (a_1-a_2) + (b_1-b_2)\,i$$

Пример: Найти разность двух комплексных чисел:

$Z_1=4-3i$; $Z_2=-3+5i$.

Решение: $Z_1-Z_2=(4-3i)-(-3+5i)=(4-(-3))+(-3-5)\,i=7-8\,i$.

2.Найдите разность Z_1 и Z_2 комплексных чисел: (под руководством преподавателя).

1) $Z_1=4-2i$, $Z_2=3+8i$;

2) Z_1 =5/6+3/4i, Z_2=5/6-1/4i;
3) Z_1 =7/8-1/5i, Z_2=3/8-1/5i;
4) Z_1 = 1,5-2,1i, Z_2=0,5+0,9i.
5) Z_1 =3/4-1/2i, Z_2=1/8+3/8i;
6) Z_1 =7/8-1/2i, Z_2=-1/2i.

Задачи для самостоятельного решения. Вычислить:
1. $(2 + 3i)+ (3 – 5i)$;
2. $(1 + 3\,i)- (2 + i)$;
3. $(3 + 5\,i)+ (3 – 5\,i)$.

Д/З. Произведите сложение и вычитание комплексных чисел:

1). $(3 + 5i) + (7 – 2i)$.
2). $(6 + 2i) + (5 + 3i)$.
3). $(– 2 + 3i) + (7 – 2i)$.
4). $(5 – 4i) + (6 + 2i)$.
5). $(3 – 2i) + (5 + i)$.
6). $(4 + 2i) + (– 3 + 2i)$.
7). $(– 5 + 2i) + (5 + 2i)$.
8). $(– 3 – 5i) + (7 – 2i)$.

Практическое занятие№2. Выполнение упражнений на умножение и деление комплексных чисел, заданных в алгебраической форме.

Цель: Закрепить умения и навыки на умножение и деление комплексных чисел, заданных в алгебраической форме

Умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме выполняется по формуле:

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = (a_1 a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2+ a_2 b_1)\, i.$$

Правило умножения распространяется и на большее число сомножителей.

Пример. Найти произведение комплексных чисел:

1)z_1 =2+3i, z_2=-1-i;

2) z_1 =3-2i, z_2= 1+4i; z_3 =2-i,

Решение

1)z_1 =2+3i, z_2=-1-i;

$z_1z_2 = (2+3i)\cdot(-1-i) = (2(-1)-3(-1)) + (2(-1) +(-1)3)\ i= (-2+3) +(-2-3)\ i=1-5i$

2) $z_1 =3-2i$, $z_2= 1+4i$; $z_3 =2-i$.

$z_1\ z_2\ z_3$

$z_1\ z_2 = (3-2i\cdot)(1+4i) = (3\cdot1-(-2\cdot4)) + (3\cdot4 +1\cdot (-2))\ i = (3+8) +(12-2)\ i = 11+10\ i$

$z_1\cdot z_2 \cdot z_3 = (11+10\ i)\cdot(2- i)= (11\cdot2-10\cdot (-1))+(11\cdot (-1)+2\cdot10)\ i =$
$= (22+10)+(-11+20)\ i=32+9\ i$

При перемножении сопряженных комплексных чисел

$z= (a +bi)$ и $\overline{z}= (a - bi)$ получим

$z\overline{z} = (a + bi)\ (a - bi) =a^2 –b^2\ i^2 = a^2 + b^2 = r^2$, где r модуль каждого из сомножителей. Итак, произведение двух сопряженных комплексных чисел является действительным числом, равным r^2, т.е. квадрату их общего числа.

Равенство $\mathbf{a^2 + b^2 = (a + bi)\ (a - bi)}$ показывает, что сумму квадратов двух действительных чисел можно разложить на комплексные множители. Это разложение на множители невыполнимо во множестве действительных чисел.

Пример: Используя формулу $a^2 + b^2 = (a + bi)\ (a - bi)$ разложить на множители $4m^2+9n^2$.

Решение: $4m^2+9n^2=(2\ m)^2 +(3\ n)^2= (2\ m+3ni)\ (2\ m-3ni)$.

3. Используя формулу $a^2 + b^2 = (a + bi)\ (a - bi)$ разложить на множители:

1) $a + b$;

2) $2+\sqrt{5}$;

3) 5

4.Найдите произведение комплексных чисел.

1) $z_1 =2-3i$, $z_2=-4+i$;

2) $z_1 =2/3-1/4i$, $z_2=2/3+1/4i$;

3) $z_1= \sqrt{5}i$, $z_2=4\sqrt{5}i$;

3) $z_1 =-1+6i$, $z_2=6-i$;

4) $z_1 =5-3i$, $z_2 =2i$;

5) $z_1 = -1+6i$, $z_2=6-i$;

6) $z_1 =2/3-1/3i$, $z_2=1/3+4/3i$;

7) $z_1= 0{,}2-0{,}3i$, $z_2=0{,}5+0{,}4i$.

Деление комплексных чисел, заданных в алгебраической форме.

Деление комплексных чисел рассматривается как действие, обратное умножению, и производиться по формуле $\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=$ $\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$

Пример: Найти частное от деления числа z_1= 3+4i, z_2=2-3i.

Решение:

$\frac{3+4i}{2-3i}=\frac{(3+4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{6+9i+8i+12i}{4+9}=\frac{6+17i-12}{4+9}=\frac{-6+17i}{13}=\frac{-6}{13}+\frac{17}{13}i$

5.Выполните действия.

1) $\frac{1}{i}$; 2) $\frac{1}{1-i}$; 3) $\frac{3-2i}{1+3i}$ 4) $\frac{(1+2i)(2+i)}{3-2i}$; 5) $\frac{(2+3i)}{(4+i)(2-2i)}$; 6) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$; 7) $\frac{(a+bi)}{(a-bi)}$; 8) $\frac{a+bi}{a-bi}$ - $\frac{a-bi}{a+bi}$; 9) $\frac{1-3i}{-2+i}$ - $\frac{1+4i}{-1+3i}$; 10) $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$.

Возведение комплексных чисел в степень.

Возведение комплексного числа z= a+ вi в степень n ($n \in N$) будет рассматривать как частный случай умножения комплексных чисел

$z^n = z\cdot z\cdot z\ldots\cdot z$.

Натуральные степени мнимой единицы i.

$i^2 =1$;

$i^3 = i^2\cdot i=-i$;

$i^4 = i^2\cdot i^2 =1$;

$i^5 = i^4\cdot i =-1$;

$i^6 = i^4\cdot i^2 = 1$;

$i^7 = i^6\cdot i = -1$;

$i^8 = i^4\cdot i^4 = 1$.

Учитывая, что $i^4 =1$, имеем $i^{4n+1} =i\cdot i^{4n+2}=-1$;

$i^{4n+3}=-i$, где $n \in N$

Пример: Вычислить i^{55}

55=52+3

$i^{55}= i^{13*4+3}= i^{13*4}i^3=1\cdot(-1) = -1$

6. Вычислите:

1) $i^6+i^{20}+i^{30}+i^{36}+i^{54};$

2) $i\cdot i^2+i^3\cdot i^4;$

3) $i+i^2+i^3+ i^4+ i^5;$

4) $(1- i)^8$

5) $(1+ i)^{15}$

6) $(1+ i)^{-3}$

7) $(1- i)^{-12}$

7. Разложите на комплексные множители, применив формулу

$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$:

1) $a^2 + 4b^2$

2) $1+\sqrt{3}$

3) 3

Д/З Произведите умножение комплексных чисел:

1). $(2 + 3i)(5 - 7i)$; 2). $(6 + 4i)(5 + 2i)$; 3). $(3 - 2i)(7 - i)$;

4). $(-2 + 3i)(3 + 5i)$; 5). $(1 - i)(1 + i)$; 6). $(3 + 2i)(1 + i)$.

Выполните деление: $\frac{5-7i}{2+3i}$

Практическое занятие №3. Действия над приближенными значения чисел

Цель работы: закрепить навыки выполнения действий над приближенными значениями

Сложение приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b, \qquad (2.1)$$

где a и b – приближенные значения чисел; Δa и Δb – границы абсолютных погрешностей соответствующих приближений.

Граница относительной погрешности суммы вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{a+b} = \frac{\Delta(a+b)}{a+b}. \qquad (2.2)$$

Вычитание приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b, \qquad (2.3)$$

где a и b – приближенные значения чисел; Δa и Δb – границы абсолютных погрешностей соответствующих приближений.

Граница относительной погрешности суммы вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{a-b} = \frac{\Delta(a+b)}{a+b}. \qquad (2.4)$$

Умножение, деление, возведение в степень приближенных значений чисел и извлечение из них корня

Формулы для оценки границ абсолютной погрешности произведения (частного сложны, поэтому на практике сначала находят относительную погрешность произведения (частного), а затем погрешности произведения (частного). Формулы для границ абсолютной и относительной погрешностей некоторых функций приведены в таблице.

Формулы для границ абсолютной и относительной погрешностей некоторых функций

Функция	Граница абсолютной погрешности	Граница относительной погрешности
$y = ab$	$\Delta y = \lvert b\rvert \cdot \Delta a + \lvert a\rvert \cdot \Delta b$	$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b}$
$y = abc$	$\Delta y = \lvert bc\rvert \cdot \Delta a + \lvert ac\rvert \cdot \Delta b + \lvert ab\rvert \cdot \Delta c$	$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b} + \dfrac{\Delta c}{c}$
$y = a^n$	$\Delta y = na^{n-1} \cdot \Delta a$	$\varepsilon_y = n\dfrac{\Delta a}{a}$
$y = a^2$	$\Delta y = 2a \cdot \Delta a$	$\varepsilon_y = 2\dfrac{\Delta a}{a}$
$y = a^3$	$\Delta y = 3a^3 \cdot \Delta a$	$\varepsilon_y = 3\dfrac{\Delta a}{a}$
$y = \sqrt{a}$	$\Delta y = \dfrac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$	$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta a}{2a}$
$y = \sqrt[3]{a}$	$\Delta y = \dfrac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}$	$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta a}{3a}$
$y = \dfrac{a}{b}$	$\Delta y = \dfrac{\lvert b\rvert \cdot \Delta a + \lvert a\rvert \cdot \Delta b}{b^2}$	$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b}$

Примеры на нахождение приближенных значений (работа под руководством преподавателя)

Пример 1. Даны приближенные значения числа $x = \frac{2}{3}$; $a_1 = 0{,}6$; $a_1 = 0{,}66$; $a_1 = 0{,}67$. Какое из этих трех приближений является лучшим?

Решение:

Даны приближенные значения числа $x = \frac{2}{3}$; $a_1 = 0{,}6$; $a_1 = 0{,}66$; $a_1 = 0{,}67$Какое из этих трех приближений является лучшим?

Решение. Находим:

$$\alpha_1 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}6\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right| = \frac{1}{15}, \alpha_2 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}66\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{33}{50}\right| = \frac{1}{150}, \alpha_3 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}67\right|$$
$$= \left|\frac{2}{3} - \frac{67}{100}\right| = \frac{1}{300}.$$

Лучшим приближением числа xявляется $a_3 = 0{,}67.$

Пример 2. Длина детали x (см) заключена в границах $33 \leq x \leq 34.$ Найдите границу абсолютной погрешности измерения детали.

Решение. Примем за приближенное значение длины детали среднее арифметическое границ: $a = \frac{33+34}{2} = 33{,}5$ (см). Тогда граница абсолютной погрешности приближенного значения длины детали не превзойдет $0{,}5$ (см). Величину Δa можно найти и как полу разность верхней и нижней границ, т. е. $\Delta a = \frac{34-33}{2} = 0{,}5$ (см). Длина детали x, найденная с точностью до $\Delta a = 0{,}5$ (см), заключена между приближенными значениями числа x:

$$33{,}5 - 0{,}5 \leq x \leq 33{,}5 + 0{,}5; x = 33{,}5 \pm 0{,}5 \text{ (см)}.$$

Пример 3. Найдите границу абсолютной погрешности приближенного значения 0,1968 числа x, все цифры которого верны в строгом смысле.

Решение: Граница абсолютной погрешности этого числа равна 0,00005 , т. е. половине единицы последнего разряда, сохраняемого в записи.

Пример 4. Укажите верные цифры (в широком смысле) следующих чисел:

1) $3{,}73 \pm 0{,}056$; 2) $3{,}627 \pm 0{,}00008$
2) $4{,}732 \pm 0{,}06$; 4) 561274 ± 500

Решение.

1) Граница погрешности $\Delta a = 0{,}056$ не превосходит единицы разряда десятых (неравенство $0{,}056 < 0{,}1$ верное). Следовательно, верными являются цифры 3 и 7.

2) Так как $\Delta a = 0{,}0008 < 0{,}001$, то все цифры приближенного числа 3,627 верны.

3) Поскольку $\Delta a = 0{,}06 < 0{,}1$, верными являются цифры 4 и 7.

4) Так как $\Delta a = 500 < 1000$, то верны цифры 5, 6 и 1

Пример 5. За приближенное значение числа 26,7 взято число 27. Являются ли цифры числа 27 верными?

Пример 6. Приближенное значение числа $9{,}587 \pm 0{,}03$ округлить до первого справа верного разряда.

Пример 7. В результате измерений получили, что длина карандаша равна 16 см, а длина комнаты 730 см. Что можно сказать о качестве двух измерений?

Пример 8. Найдите относительную погрешность числа 6,8, если обе цифры его верны в строгом смысле.

Пример 9. Какие цифры числа $4{,}86\ (0{,}3\%)$ являются верными?

Пример 10. При вычислении некоторой величины X стало известно, что $6 < X < 7$. Сколько верных цифр нужно взять, чтобы приближенное значение a имело относительную погрешность не больше $0{,}3\%$?

Пример 11. Найдите сумму S приближенных значений чисел $6{,}8 \pm 0{,}05;\ 4{,}3 \pm 0{,}05$ и $3{,}575 \pm 0{,}0005$.

Пример 12. Вычислить разность двух приближенных значений чисел
$a = 5{,}863 \pm 0{,}0005$ и $b = 2{,}746 \pm 0{,}0005$. Найдите
$\Delta(a-b)$ и ε_{a-b}.

Пример 13. Найдите верные цифры произведения приближенных значений чисел $a = 0{,}3862$ и $b = 0{,}8$.

Пример 14. Вычислите объем цилиндра $V = \pi R^2 H$, если $R = 45{,}8$ см, $H = 78{,}6$ см. Укажите верные цифры ответа.

Пример 15. Найдите границу абсолютной погрешности частного приближенных значений чисел $a = 8{,}36 \pm 0{,}005$ и $b = 3{,}72 \pm 0{,}004$.

Пример 16. Вычислите $X = \frac{a}{b+c}$, если известно, что $a = 7{,}2 \pm 0{,}05,\ b = 3{,}46 \pm 0{,}03,\ c = 5{,}09 \pm 0{,}04$.

Пример 17. Вычислите относительную погрешность, допущенную при вычислении площади квадрата, если приближенное значение стороны квадрата равно $68 \pm 0{,}5$.

Пример 18. Вычислите относительную погрешность, допущенную при извлечении квадратного корня из числа $76{,}8 \pm 0б05$.

Пример 19. Вычислите границу абсолютной погрешности при нахождении гипотенузы прямоугольного треугольника, катеты которого равны $a = 56{,}8$ см, $b = 44{,}6$ см.

Пример 20. С какой точностью надо измерить длину стороны квадрата, чтобы при вычислении его площади граница абсолютной погрешности не превышала 1 см^2? Грубое приближенное значение стороны квадрата равно 9 см.

Пример 21. С какой точность надо измерить длину ребра куба a, чтобы при вычислении его объема граница абсолютной погрешности не превышала $100\ см^3$? Грубое приближенное значение ребра куба ровно $80\ см$.

<u>Практическая работа № 4.</u> Выполнение упражнений по разделу «Развитие понятия числа».

Цель: Закрепить умения и навыки по разделу «Развитие понятия числа».

Комплексные числа записываются в виде: a+ bi. Здесь a и b – действительные числа, a i – мнимая единица, т.е. $i^2 = -1$.

Число a называется абсциссой, a b – ординатой комплексного числа a+ bi. Комплексное число 0+ bi называется чисто мнимым числом. Запись bi означает то же самое, что и 0+ bi.

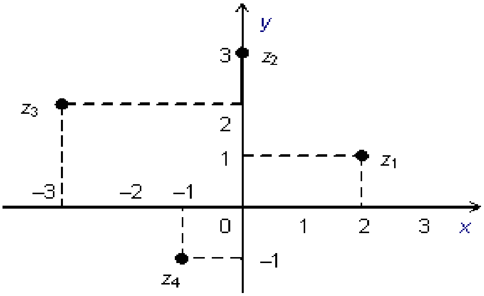
Модулем комплексного числа называется длина вектора OP, изображающего комплексное число на координатной (комплексной) плоскости. Сопряжённые комплексные числа имеют одинаковый модуль

Рассмотрим на плоскости декартову прямоугольную систему координат xOy. Каждому комплексному числу $z = a + bi$ можно сопоставить точку с координатами (a;b) , и наоборот, каждой точке с координатами (c;d) можно сопоставить комплексное число $w = c + di$. Таким образом, между точками плоскости и множеством комплексных чисел устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому комплексные числа можно изображать как точки плоскости. Плоскость, на которой изображают комплексные числа, обычно называют комплексной плоскостью.

Пример. Изобразим на комплексной плоскости числа

$Z_1 = 2 + i$; $z_2 = 3i$; $z_3 = -3 + 2i$; $z_4 = -1 – i$.

Решение:



Арифметические действия над комплексными числами те же, что и над действительными: их можно складывать, вычитать, умножать и делить друг на друга. Сложение и вычитание происходят по правилу

Сложение двух комплексных чисел выполняются по формуле:

$$(a_1+b_1i) + (a_2+b_2i) = (a_1+a_2) + (b_1+b_2)\, i;$$

Вычитание двух комплексных чисел находится по формуле

$$(a_1+b_1i) - (a_2+b_2i) = (a_1- a_2) + (b_1-b_2)\, i$$

Умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме выполняется по формуле:

$$(a_1+b_1i)\,(a_2+b_2i) = (a_1 a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2+ a_2 b_1)\, i.$$

Деление комплексных чисел, заданных в алгебраической форме.

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

Пример. Решить квадратное уравнение $x^2+2x+2=0$

Находим дискриминант $D=b^2-4ac=2^2-4\cdot1\cdot2=4-8=--4$

Получили, что $D=-4<0$ и, казалось бы, что решение можно заканчивать. Но нет! В нашем задании требуется решить уравнение над комплексным множеством, а то что дискриминант отрицательный означает только лишь отсутствие вещественных корней. А комплексные корни есть! Найдем их продолжив решение:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$

Заметим что $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1} = 2i$ и продолжим вычисление:

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$

$x_1 = -1+i$, $x_2 = -1-i$

Ответ: $x_1 = -1+i$, $x_2 = -1-i$

Самостоятельная работа

1 вариант	2 вариант
№ 1. Изобразите на плоскости заданные комплексные числа	
$z_1 = 4i$	$z_1 = -5i$
$z_2 = 3 + i$	$z_2 = 4 + i$
$z_3 = -4 + 3i$	$z_3 = -7 + 2i$
$z_4 = -2 - 5i$	$z_4 = -3 - 6i$
№ 2. Произведите сложение и вычитание комплексных чисел:	
а) (2 + 3i) (5 – 7i)	а) (1 –i) (1 + i)
б). б) (6 + 4i) (5 + 2i)	б) (3 + 2i) (1 + i).
с) (3 – 2i) (7 – i).	с) (6 + 4i)3i.
д) (– 2 + 3i)(3 + 5i).	д)(2 – 3i)(– 5i).
№ 3. Произведите умножение комплексных чисел:	
а) (2 + 3i) (5 – 7i)	а) (1 –i) (1 + i)
б). (6 + 4i) (5 + 2i)	б) (3 + 2i) (1 + i)
с) (3 – 2i) (7 – i).	с) (6 + 4i)3i.
д) (– 2 + 3i)(3 + 5i).	д)(2 – 3i)(– 5i).
№ 4. Выполните деление комплексных чисел:	
$\frac{5+3i}{1-2i}$	$\frac{5+3i}{1-2i}$
№ 5. Решите уравнения:	
а) $x^2 - 4x + 13 = 0$.	а) $2{,}5x^2 + x + 1 = 0$.

б) $x^2 + 3x + 4 = 0$	б) $4x^2 – 20x + 26 = 0$.

<u>Практическая работа №5.</u> Преобразование выражений, содержащие радикалы

Цель: Закрепить понятия преобразования выражений, содержащие радикалы

Основные свойства арифметических корней n-ой степени.

Для решения любых натуральных чисел n и k больших 1 и любых неотрицательных чисел a и b выполнены равенства:

1°. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2°. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (b≠ 0);

3°. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

4°. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$;

5°. $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$

6°. Для любых чисел a и b, таких, что $0 \leq a < b$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Упражнения на выполнение преобразований:

1. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[7]{-1}$; в) $\sqrt[4]{625}$;

г) $\sqrt[17]{1}$; д) $\sqrt[19]{0}$; е) $\sqrt[10]{1024}$;

ж) $\sqrt[3]{343}$; з) $\sqrt[5]{-243}$;

2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[5]{-32}$; в) $\sqrt[4]{81}$; г) $\sqrt[3]{64}$;

д) $\sqrt[3]{\frac{-27}{8}}$; е) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$; ж) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; з) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$.

4.Упростить:

а) $-\sqrt[4]{11}$; б) $(\sqrt[3]{7})^3$; в) $3\sqrt[5]{3}$;

г) $\sqrt[7]{(-3)^7}$; д) $7\sqrt[8]{(-3)^8}$; е) $\sqrt[6]{64^2}$.

5.Найдите значение числового выражения.

а) $\sqrt[4]{16\cdot 625}$; б) $\sqrt[3]{8\cdot 343}$; в) $\sqrt[5]{32\cdot 243}$;
г) $\sqrt[5]{0{,}00001\cdot 32}$

6. Найдите значение числового выражения.

а) $\sqrt[5]{27}\ \sqrt[5]{9}$; б) $\sqrt[7]{16}\sqrt[7]{-8}$; в) $\sqrt[3]{9}\ \ \sqrt[6]{9}$; г) $\sqrt[3]{-25}\sqrt[6]{25}$;

д) $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$; е) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$; ж) $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$; з) $\frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}}$.

7.Найдите значение числового значения.

а) $\sqrt[4]{3\frac{3}{8}\cdot 1\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}}$; б) $\sqrt[5]{-\frac{243}{1024}}\cdot\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$;

в) $\sqrt[6]{\frac{64}{100000000}}\cdot\sqrt[4]{39\frac{1}{16}}:\sqrt[3]{-3\frac{19}{27}}$

8.Сравните числа:

а) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt[6]{40}$; б) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[8]{500}$;

в) $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[10]{87}$; г) $\sqrt{0{,}3}$ и $\sqrt[5]{0{,}05}$;

д) $\sqrt[3]{-2}$ и $\sqrt[3]{-4}$; е) $\sqrt[5]{-5}$ и $\sqrt[3]{-3}$;

ж) $\sqrt[3]{-5}$ и $\sqrt[5]{-3}$; з) $\sqrt[3]{-0{,}4}$ и $\sqrt[5]{-0{,}3}$

9. Вынесите множители за знак корня (a $>$ 0, b$>$ 0):

а) $\sqrt{4a}$; б) $\sqrt{18b}$; в) $\sqrt[3]{64c}$; г) $\sqrt[5]{a^6}$;

д) $\sqrt[4]{32b^5}$; е) $\sqrt[6]{64a^8b^{11}}$; ж) $\sqrt[5]{-128a^7}$; з) $\sqrt[4]{6a^{12}b^2c^4}$

10. Внесите множитель под знак корня (a $>$ 0, b$>$ 0):

а) $2\sqrt{3}$; б) $3\sqrt[3]{5}$; в) $2\sqrt[5]{\frac{1}{16}}$; г) $a\sqrt[4]{7}$;

д) $b\sqrt[6]{2}$; е) $-b\sqrt[4]{3}$; ж) $-ab\sqrt[3]{-4}$; з) $ab^2\sqrt[8]{\frac{5b^3}{a^7}}$.

Решите уравнения.

11. а) $x^3 = 4$; б) $x^3 + 4 = 0$; в) $x^4 = 10$; г) $x^6 = 5$; д) $x^5 = 3$;

12 а) $0{,}02x^6 - 1{,}28 = 0$; б) $12\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0$.

13. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}}$ б) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}} \cdot \sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$

в) $\sqrt[3]{10+\sqrt{73}} \cdot \sqrt[3]{10-\sqrt{73}}$ г) $\frac{\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}} + \sqrt{17}$.

Д/З

1.Найти значение числового выражения:

а) $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$; б) $\sqrt[4]{48 \cdot 27}$; в) $\sqrt[5]{160 \cdot 625}$; з) $\sqrt[3]{75 \cdot 45}$.

2. Решите уравнения.

а) $x^{10} - 15 = 0$; б) $x^6 - 64 = 0$; в) $x^7 + 128 = 0$.
г) $16x^4 - 1 = 0$; д) $0{,}01x^3 + 10 = 0$.

<u>Практическое занятие №6.</u> Обобщение понятия о показателе степени.

1. Свойства степеней и корней

Степенью числа a с натуральным показателем n называется произведение n множителей, каждый из которых равняется a. Степень числа a с показателем n обозначают a^n, например:

$$a^1 = a,\quad a^2 = a \cdot a,\quad a^3 = a \cdot a \cdot a,\quad a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a, \ldots$$

В общем случае при $n > 1$ имеем

$$a^n = \underbrace{aa\ldots a}_{n}. \qquad (1)$$

Число a называется основой степени, число n — показателем степени.

Приведем основные свойства действий со степенями.

1. $a^m a^n = \underbrace{aa...a}_{m}\underbrace{aa...a}_{n} = \underbrace{aa...a}_{m+n} = a^{m+n}$.

2. $(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m ... a^m}_{n} = a^{\overbrace{m+m+...+m}^{n}} = a^{mn}$.

3. $(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)...(ab)}_{n} = a^n b^n$.

4. $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{\overbrace{aa...a}^{m}}{\underbrace{aa...a}_{n}} = a^{m-n}$; $\dfrac{a^m}{a^m} = a^0 = 1$.

5. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$.

6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\dfrac{a}{b}\dfrac{a}{b}...\dfrac{a}{b}}_{n} = \dfrac{a^n}{b^n}$. (2)

Приведенные свойства обобщаются для любых показателей степени

1. $a^x a^y = a^{x+y}$, 4. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $a^0 = 1$,

2. $(a^x)^y = a^{xy}$, 5. $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$,

3. $(ab)^x = a^x a^y$, 6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$. (3)

Часто в вычислениях используются степени с рациональным показателем. При этом удобным оказалось такое обозначение:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \quad (4)$$

Корнем n- ой степени из числа a называется число b, n- я степень которого равняется a:

$$b = \sqrt[n]{a} \qquad b^n = a. \quad (5)$$

Корень также называется радикалом.

Корень нечетной степени n всегда существует. Корень четной степени 2n из отрицательного числа не существует. Существуют два противоположных числа, которые являются корнями четной степени из положительного числа a>0. Положительный корень n- ой степени из положительного числа называют арифметическим корнем.

Из формул (3), (4) вытекают такие свойства радикалов

1. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

2. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

3. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$.

4. $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}$.

5. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

6. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

7. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

8. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.

9. $\sqrt{a^2} = |a|$.

10. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

11. $\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^{2n+1} = a$.

12. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$. (6)

Если степень корня n = 2, то показатель корня обычно не пишется.

Пример 1. Найти значение выражения

$\sqrt{18 \cdot 50}$.

Подкоренное выражение разложим на простые множители:

$$\sqrt{18 \cdot 50} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2} = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30.$$

Пример 2. Упростить выражение

$\sqrt{36x^{10}y^6}$ при $x > 0,\ y < 0$

Имеем:

$$\sqrt{36x^{10}y^6} = \sqrt{6^2 \cdot (x^5)^2 (y^3)^2} = 6|x^5| \cdot |y^3| = -6x^5y^3$$

Пример 3. Извлечь корень

$\sqrt{\dfrac{16x^2}{y^6}}$ при $x < 0,\ y > 0$.

Имеем:

$$\sqrt{\frac{16x^2}{y^6}} = \frac{4|x|}{|y^3|} = \frac{-4x}{y^3}$$

1)Преобразование корня по формуле $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ (7) **называется внесением множителя под знак радикала.**

Пример 4. Внести множитель под знак корня $5\sqrt{2}$.

Исходя из формулы (7) получим $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 2} = \sqrt{50}$

Пример 5. Внести множитель под знак радикала $x\sqrt{y}$ при $x < 0$.

Имеем равенство $x\sqrt{y} = -(-x)\sqrt{y} = -\sqrt{(-x)^2 y} = -\sqrt{x^2 y}$.

2) Преобразование корня исходя из формулы $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ **называется вынесением множителя из-под знака радикала.**

Пример 6. Вынести множитель из-под знака корня в выражении

$\sqrt{x^5}$ при $x \geq 0$.

Получим: $\sqrt{x^5} = \sqrt{(x^2)^2 x} = x^2\sqrt{x}$.

Пример 7. Вынести множитель из-под знака корня

$\sqrt{2x^2}$ при $x \leq 0$.

Имеем: $\sqrt{2x^2} = \sqrt{(-x)^2 2} = -x\sqrt{2}$

Пример 8. Вынести множитель из-под знака корня:

$$\sqrt[3]{-a^6 \cdot b^9 \cdot c^2} = -a^2 \cdot b^3 \sqrt[3]{c^2}.$$

$$\sqrt[4]{a^{12} b^{16} c^3} = a^3 b^4 \sqrt[4]{c^3}, \quad a > 0.$$

$$\sqrt[5]{a^9 b^{11}} = ab^2 \sqrt[5]{a^4 b}.$$

Радикалы вида $a\sqrt[n]{c},\ \ b\sqrt[n]{c}$, где a, b — рациональные числа, называются подобными. Их можно прибавлять и отнимать:

$$a\sqrt[n]{c} + b\sqrt[n]{c} = (a+b)\sqrt[n]{c}, \quad a\sqrt[n]{c} - b\sqrt[n]{c} = (a-b)\sqrt[n]{c}.$$

Пример 9. Упростить:

$$\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{32} =$$

Пример 10. Сложить радикалы:

$$\sqrt{18} - \sqrt{12} + \sqrt{32} + \sqrt{27} =$$

Пример 11. Выполнить действие:

$$\frac{1}{2}\sqrt{8} - \frac{1}{2}\sqrt{27} + \frac{1}{2}\sqrt{50} - \frac{3}{4}\sqrt{12} =$$

Заметим, что равенство $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ не выполняется. В этом можно убедиться на таком примере:

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7, \quad \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Приведем примеры умножения радикалов.

Пример 12.

$$2\sqrt{3}\,5\sqrt{2} = 10\sqrt{3}\sqrt{2} = 10\sqrt{6},$$

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{8} + \sqrt{3}\right) = \sqrt{2}\sqrt{8} + \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{16} + \sqrt{6} = 4 + \sqrt{6}$$

Чтобы перемножить радикалы с разными степенями, их сначала превращают в радикалы с одинаковыми степенями.

Пример 13. Перемножим радикалы:

$$(3\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{2}+\sqrt{3})=3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=$$
$$=6\sqrt{4}+3\sqrt{6}+2\sqrt{6}+3=15+5\sqrt{6}.$$

Во время умножения радикалов можно использовать формулы сокращенного умножения. Например:

$$(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=(2\sqrt{3})^2+2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=12+4\sqrt{6}+2=14+\sqrt{6};$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3=(\sqrt{3})^3+3(\sqrt{3})^2\sqrt{2}+3\sqrt{3}(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^3=$$
$$=3\sqrt{3}+9\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{2}=9\sqrt{3}+11\sqrt{2};$$

$$(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}+\sqrt{3})=(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2=8-3=5.$$

Если радикалы находятся в знаменателе дроби, то, используя свойства радикалов, можно избавиться от иррациональности.

Пример 14. Рационализируем знаменатели дробей

$$\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}}=\sqrt{\frac{33}{11}}=\sqrt{3};\quad \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{16}{8}}=\sqrt{2};$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sqrt{\frac{7}{10}}=\sqrt{\frac{70}{100}}=\frac{\sqrt{70}}{10};\quad \sqrt{\frac{7}{4\cdot 3}}=\sqrt{\frac{7\cdot 3}{4\cdot 9}}=\frac{\sqrt{21}}{6};$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{10}}=\sqrt[3]{\frac{100}{1000}}=\frac{\sqrt[3]{100}}{10};\quad \sqrt[3]{\frac{7}{12}}=\sqrt[3]{\frac{7}{3\cdot 4}}=\sqrt[3]{\frac{7\cdot 9\cdot 2}{27\cdot 8}}=\frac{\sqrt[3]{126}}{6}.$$

Выражения $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$, $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ называются сопряженными. Произведение сопряженных выражений не содержит радикалов:

$$(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})=a^2b-c^2d.$$

Это свойство используется для рационализации знаменателей.

Пример 15. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2};$$

$$\frac{\sqrt{3}+5}{5-\sqrt{3}}=\frac{\left(5+\sqrt{3}\right)^2}{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)}=\frac{25+10\sqrt{3}+3}{22}=\frac{14+5\sqrt{3}}{11};$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}\left(3\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)}{\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)}=\frac{6\sqrt{15}+4\sqrt{10}}{19}.$$

$$\sqrt{2}\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{9}=\sqrt[6]{72};$$

$$\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[15]{2^3}\cdot\sqrt[15]{2^5}=\sqrt[15]{8\cdot 32}=\sqrt[15]{256};$$

$$\sqrt[4]{2}\sqrt[2]{3}=\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{18};$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=\sqrt[6]{\frac{27}{8}}\sqrt[6]{\frac{16}{81}}=\sqrt[6]{\frac{2}{3}}=\sqrt[6]{\frac{2\cdot 3^5}{3^6}}=\frac{1}{3}\sqrt[6]{486}.$$

Избавимся от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}}{3-\sqrt[3]{9}}=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}\right)\left(9+3\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9^2}\right)}{\left(3-\sqrt[3]{9}\right)\left(3^2+3\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(3+3\sqrt{3}+3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+3\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{243}\right).$$

3. Вычисление иррациональных выражений

С помощью свойств корней можно упрощать и вычислять иррациональные выражения.

Пример 16. Вычислить

$$\frac{3\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+8\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}.$$

Пример 17. Вычислить:

$$5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}-11\sqrt[6]{18}+2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$$

Выполним действия.

Часто используется формула двойного радикала:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\quad\left(a^2\geq b\right)\ (8)$$

Пример 18. Вычислить

$$a=\left(\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}.$$

Поскольку $1-\sqrt{2}<0$, то $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}=-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$.

Дальше имеем:

$$\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}=\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}\sqrt[6]{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}=1$$

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}=1.$$

Итак, а = - 2.

Пример 19. Вычислить

$$x=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}.$$

Возведем уравнение в куб, воспользовавшись равенством $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

Получили для x кубическое уравнение

$$x^3=9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\cdot x,$$

или $x^3-3x-18=0$,

имеет корни $x_1 = 3,\ \ x_{2,3} = \frac{1}{2}\left(-3 \pm i\sqrt{15}\right),\ \ i = \sqrt{-1}$.

Во множестве действительных чисел имеем корень x = 3.

4. Оценки для радикалов

Если

$\frac{m}{n} > 0,\ \ a \geq b \geq 0$, то $a^{\frac{m}{n}} \geq b^{\frac{m}{n}} \geq 0$, или $\sqrt[n]{a^m} \geq \sqrt[n]{b^m}$. (1)

Это неравенство можно использовать для доведения неровностей, которые содержат радикалы.

Пример 20. Доказать, что $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$.

Возведя неравенство в шестую степень, получим очевидное неравенство

$\left(\sqrt[3]{3}\right)^6 > \left(\sqrt{2}\right)^6,\ \ 3^2 > 2^3,\ \ 9 > 8$

Можно приводить радикалы к одной и то й же самой степени:

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9},\ \ \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$.

Поскольку $\sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8}$, то $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$.

Пример 21. Оценим $\sqrt{90}$.

Поскольку

$81 < 90 < 100$, то $\sqrt{81} < \sqrt{90} < \sqrt{100}$. Итак, $9 < \sqrt{90} < 10$.

<u>Практическое занятие №7</u>. Преобразование степенных выражений

Цель: Закрепить понятия степени с произвольными показателями.

<u>а) Степень с натуральным показателем.</u>

Определение: a^n, где n-любое натуральное число называется степенью с натуральным показателем.

$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a$

Для любых чисел a и b любых целых чисел m и n справедливы равенства

$a^m a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (a \neq 0)$

$(ab)^n = a^n b^n$

$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ (b$\neq$ 0))

$a^1 = a$

$a^0 = 1 \ (a \neq 0)$

б) Степень с рациональным показателем.

Определение Степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем r= $\frac{m}{n}$, где m-целое число, а n- натуральное (n>1), называется число

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^n}$.

Пример 1.

а) $7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}$; б) $2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$; в) $a^{-\frac{7}{15}} = \sqrt[15]{a^{-7}}$.

Для любых рациональных чисел r и s любых положительных a и b справедливы равенства:

1°. $a^r a^s = a^{r+s}$,

2°. $a^r : a^s = a^{r-s}$,

3°. $(a^r)^s = a^{rs}$,

4°. $(ab)^r = a^r b^r$,

5°. $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Пример 2. Найти значение выражения:

$(\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}})) : 5^{-\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{8 \cdot 5} \cdot 2^{\frac{1}{4}}) : 5^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3 \cdot 5} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{4}{3}} =$

$= 2^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 2^1 \cdot 5^1 = 10.$

Пример 3.

а) $\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}.$

б) $\frac{a^{1,2}-b^{2,1}}{a^{0,8}+a^{0,4}b^{0,7}+b^{1,4}} = \frac{(a^{0,4})^3-(b^{0,7})^3}{a^{0,8}+a^{0,4}b^{0,7}+b^{1,4}}$

$= \frac{(a^{0,4}-b^{0,7})\,(a^{0,8}+a^{0,4}b^{0,7}+b^{1,4})}{a^{0,8}+a^{0,4}b^{0,7}+b^{1,4}} = a^{0,4} - b^{0,7}$

Пример 4. Сравним числа 2^{300} и 3^{200}

$2^{300} = 2^{3*100} = 8^{100}$

$3^{200} = 3^{200} = 3^{2*100} = 9^{100}$

$8 < 9 \Rightarrow 2^{300} < 3^{200}$.

Представить выражение в степени с рациональным показателем (5-6).

5. а) $\sqrt{11}$; б) $\sqrt[3]{5^5}$; в) $\sqrt[7]{3^{17}}$;

г) $\sqrt[9]{a^{21}}$; д) $\sqrt[3]{5^2}$; е) $\sqrt[3]{7^{-11}}$;

6. а) $2\sqrt{8a}$; б) $3\sqrt[5]{3^4c^2}$; в) $\frac{1}{8}\sqrt[7]{2^5ax^3}$;

г) $\frac{1}{9}\sqrt[11]{(3^5)(b^5c)}$ д) $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^3}}$; е) $\sqrt[7]{a^3\sqrt[4]{a}}$;

7.Представьте выражение в виде корня из числа:

а) $7^{\frac{4}{7}}$; б) $4^{1,25}$; в) $3\cdot 2^{-\frac{3}{5}}$; г) $2\cdot 8^{\frac{2}{11}}$;

д) $a^{\frac{3}{8}}$; е) $2b^{-\frac{2}{3}}$; ж) $b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{7}}$; з) $a^{\frac{3}{4}}: b^{\frac{2}{5}}$.

Найти значение числового выражения (8-9):

8. а) $16^{\frac{5}{4}}$; б) $243^{0,4}$; в) $8^{\frac{10}{3}} \cdot 81^{0,25}$;

г) $8^{\frac{1}{2}}: \left(8^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{3}{2}}\right)$; ж) $(100000)^{0,3} \cdot (0,000001)^{\frac{1}{3}}$;

з) $(1\frac{11}{25})^{-0,5} \cdot (4\frac{17}{27})^{-\frac{1}{3}}$.

9. а) $\sqrt[3]{36} \cdot 2^{\frac{4}{3}}:3^{\frac{1}{6}}$; б) $(\sqrt{5^3})\sqrt[3]{25^{0,75}} : (5\sqrt[8]{5^5})$;

в) $\sqrt[3]{100} \cdot (\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} \cdot (\frac{1}{5})^{\frac{7}{6}}$; г) $\sqrt[7]{\frac{1}{9}} : 243^{\frac{1}{7}} \cdot (7\sqrt{7})^{\frac{2}{3}}$.

10.Упростите выражение и вычислите его значение.

а) $27^{\frac{2}{3}}+(\frac{1}{16})^{-0,75} - 25^{0,5}$; б) $81^{0,75} + (\frac{1}{125})^{\frac{-1}{3}} - (\frac{1}{32})^{-\frac{3}{5}}$;

в) $(2,5^{1,5} + 0,4^{1,5})(\sqrt{2,5} + \sqrt{0,4})$;

г) $3^{-\frac{1}{3}}\sqrt[4]{1,5} : \left(0,25\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}\right)$.

11.Упростите выражение:

а) $\frac{a-b}{a^{0,5}-b^{0,5}}$; б) $\frac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x-16}$;

в) $\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}$; г) $\frac{z-8}{z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4}$.

12.Разложить на множители.

а) $3+3^{\frac{1}{2}}$; б) $4-4^{\frac{1}{3}}$; в) a -$a^{\frac{1}{2}}$; г) $(ax)^{\frac{1}{3}} + (ay)^{\frac{1}{3}}$;

д) $c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{4}}$; е) $(3x)^{\frac{1}{2}} - (5x)^{\frac{1}{2}}$; ж) a $+a^{\frac{1}{2}}$ $+b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}$ $+b^{\frac{1}{2}}$;

з) $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$ -$y^{\frac{1}{3}}$+1.

Д/З. Представить выражение в степени с рациональным показателем

а) $\sqrt[5]{2^{-15}}$; б) $\sqrt[13]{b^{-11}}$.ж) $\sqrt[3]{a^{2}\sqrt[4]{a}}$; в) $\sqrt[5]{a^{3}\sqrt[7]{a^{4}}}$.

Найти значение числового выражения:

а)$\left(\frac{27^3}{125^5}\right)^{\frac{2}{9}}$; б)$\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{\frac{-1}{8}}$.

<u>Практическое занятие № 8.</u> Вычисление логарифмов.

Цель: Закрепить основные понятия логарифмов.

Основные свойства логарифмической функции вытекает из свойств показательной функции и теоремы об обратной функции.

1°.$D(\log_a$ x)=R_+ (множество всех положительных действительных чисел);

2.°$E(\log_a$ x)=R (множество всех действительных чисел);

3.°Логарифмическая функция на всей области определенияR_+ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < x < 1$.

4°. При любом $a > 0$ ($a \neq 1$) выполнены равенства:

а) $\log_a 1 = 0$;

б) $\log_a a = 1$;

в) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ при $x > 0; y > 0$;

г) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ при $x > 0; y > 0$;

д) для любого числа $x > 0$ любого $p \in R$

$\log_a x^p = p\log_a x$.

Найдите логарифм по основанию a числа, представленного в виде степени с основанием a (1-2):

1. а) $3^2=9$; б) $3^3=27$; в) $3^4=81$; г) $3^{-1}=\frac{1}{3}$;

д) $2^{-3}=\frac{1}{8}$; е) $5^{-2}=0,04$; ж) $5^0=1$; з) $9^{\frac{1}{2}} = 3$.

2. а) $\sqrt[4]{16} = 2$; б) $\sqrt[3]{125} = 5$; в) $\sqrt{49} = 7$; г) $\sqrt[4]{81} = 3$;

д) $27^{\frac{2}{3}} = 9$; е) $32^{\frac{3}{5}}=8$; ж) $81^{\frac{3}{4}}=27$; з) $125^{\frac{2}{3}} = 25$.

Проверить справедливость равенства (3-4)

3. а) $\log_2 16 = 4$; б) $\log_5 125 = 3$;

в) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; г) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$;

д) $\log_7 343 = 3$; е) $\log_5 0,04 = -2$;

ж) $\log_{16} 1 = 0$; з) $\lg 0,01 = -2$).

4. а) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$; б) $\log_{0,5} 4=-2$; в) $\log_{\sqrt{2}} 8=6$;

г) $\log_{2\sqrt{2}} 128 = \frac{14}{3}$; д) $\log_{0,2} 0,008 = 3$; е) $\log_{0,2} 125 = -3$;

ж) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27 = -6$; з) $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2$.

Найдите число x (5-8)

5. а) $\log_5 x = 2$; б) $\log_3 x = -1$; в) $\log_7 x = -2$;

г) $\log_4 x = -3$; д) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$; е) $\log_{\sqrt{5}} x = 0$;

ж) $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$; з) $\log_{\frac{1}{7}} x = 2$.

6. а) $\log_x 81 = 4$; б) $\log_x 27 = 3$;

в) $\log_x 0{,}25 = -2$; г) $\log_{\sqrt{8}} x = \frac{2}{3}$.

7. а) $\log_x \sqrt{2} = -4$; б) $\log_x 16 = -0{,}8$;

в) $\log_x \frac{1}{9} = -1$; г) $\log_x 0{,}64 = -2$.

8. а) $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{4}$; б) $\log_x 16 = 0.8$;

в) $\log_x \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$; г) $\log_x 16 = \frac{4}{3}$.

Пример 9. Найти область определения функции

$f(x)=\log_8(4-5x)$

$4-5x > 0$

$-5x > -4$

$x < 0{,}8$ Ответ: $(+\infty; 0{,}8)$.

Пример 10. Найти область определения функции

$f(x)= \log_2(x^2-3x-4)$

$x^2-3x-4 > 0$

$(x-4)(x+1) > 0$

$(-\infty; -1)(4; +\infty)$.

Найдите область определения (11-12)

11. а) $\log_3(x-5)$; б) $\log_{0,3}(7-3x)$; в) $\log_7(2x+3)$

г) $\log_\pi(10-5x)$; д) $\log_5(9-x^2)$; е) $\log_{0,1}(x^2-4)$;

12. а) $\log_8 \frac{2-x}{x+1}$; б) $\log_7 \frac{2x+5}{x-1}$;

в) $\log_{0,9} \frac{2+3x}{5-2x}$; г) $\log_{3,1} \frac{7-2x}{2-3x}$.

Д/З. Повторить основные свойства логарифмов.

1.Найдите число х:

а) $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$; б) $\log_{\frac{1}{7}} x = 2$.

2.Найдите область определения:

а) $\log_{\sqrt{10}}(6 + x - x^2)$; б) $\log_{\sqrt[3]{2}}(x^2 - 2x - 3)$.

<u>Практическое занятие №9</u>. Преобразование логарифмических выражений

Цель занятия:

образовательная – углубить знания по логарифмам, рассмотреть алгоритм решения трех типов простейших логарифмических уравнений, рассмотреть применение свойств логарифма для вычисления значений логарифмических выражений;

воспитательная, развивающая – продолжать формирование у студентов таких методов научного познания, как анализ, сравнение, обобщение, систематизация учебного процесса.

При любом $a > 0$ $(a \neq 1)$ выполнены равенства:

а) $\log_a 1 = 0$;

б) $\log_a a = 1$;

в) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ при $x > 0;\ y > 0$; (логарифм произведения равен сумме логарифмов);

г) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ при $x > 0;\ y > 0$;(логарифм частного равен разности логарифмов);

д) для любого числа $x > 0$ любого $p \in R$

$\log_a x^p = p\log_a x$ (логарифм степени равен произведению показателя этой степени на логарифм основания этой степени).

е) формула перехода от одного основания логарифма к другому основанию:

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $x > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0 b \neq 1$.

Пример 1. Известно, что $\log_2 5 = a$ и $\log_2 3 = b$. Выразить $\log_2 3\,00$ через a и b:

Решение: $\log_2 300 = \log_2(3 \cdot 5^2 \cdot 2^2) = \log_2 3 + 2\log_2 5 + 2\log_2 2 = b + 2a + 2$.

Пример 2. Выразить логарифм по основанию2 выражения $8a^3\sqrt[7]{b^4}$:

Решение: $\log_2(8a^3\sqrt[7]{b^4}) = \log_2(2^3 a^3 b^{\frac{4}{7}}) = 3\log_2 2 + 3\log_2 a + \frac{4}{7}\log_2 b = 3 + 3\log_2 a + \frac{4}{7}\log_2 b$.

Пример 3. Найти x, если $\log_5 x = \log_5 7 + 2\log_5 3 - 3\log_5 3$.

Решение:

$$\log_5 x = \log_5 7 + 2\log_5 3 - 3\log_5 3.$$

$$\log_5 x = \log_5 7 + \log_5 3^2 - \log_5 3^3$$

$$\log_5 x = \log_5 \frac{7 \cdot 9}{8}$$

$$x = \frac{63}{8}$$

Ответ: $\frac{63}{8}$.

Пример 4. Найти значение выражения $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7}$:

Решение: $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7} = \frac{\lg\frac{72}{9}}{\lg\frac{28}{7}} = \frac{\lg 8}{\lg 4} = \frac{\lg 2^3}{\lg 2^2} = \frac{3\lg 2}{2\lg 2} = \frac{3}{2}$.

Пример 5. Что больше: $\log_2 3 + \log_2 7$ или $\log_2(3+7)$

Решение: $\log_2 3 + \log_3 5 = \log_2 3 \cdot 7 = \log_2 21$

$\log_2(3+7) = \log_2 10 \qquad 2 > 1$

$21 > 10$, т.к. $2 > 1$, $\log_2 10 < \log_2 21$, следовательно $\log_2 3 + \log_2 7 > \log_2(3+7)$.

6.Известно, что $\log_5 2 = a$ и $\log_5 3 = b$.

Выразите через a и b

а) $\log_5 12$; б) $\log_5 1{,}5$; в) $\log_5 72$; г) $\log_5 30$.

7. Прологарифмируйте по основанию 3:

а) $9a^{4\sqrt[5]{b}}$; б) $\frac{b^2}{27a^7}$; в) $(\sqrt[5]{a^3b})^{\frac{2}{3}}$; г) $\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0{,}2}$.

8. Прологарифмируйте по основанию 10:

а) $(100c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{3}}$; б) $\frac{0{,}1a}{\sqrt{a\sqrt[3]{ab}}}$; в) $\frac{10p^{\frac{1}{3}}g^{-\frac{1}{5}}}{p^{-\frac{1}{6}}g^{\frac{4}{5}}}$; г) $\frac{r^2s^6t^{-1{,}7}}{r^{\frac{1}{3}}t^{0{,}3}}$.

9.Вычислите без таблиц и вычислительных инструментов:

а) $\log_{12} 4 + \log_{12} 3$; б) $\log_3 2 + \log_3 4{,}5$;

в) $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16}$; г) $\lg 8 + \lg 125$;

д) $\lg 13 - \lg 130$; е) $\log_6 3 + \log_6 12$;

10.Докажите, что:

а) $\log_3 7 + \log_7 3 > 2$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2$.

11.Найдите x, если:

а) $\log_3 x = \log_3 1{,}5 + \log_3 8$;

б) $\log_7 x = \log_7 12 - \log_7 4$;

в) $\log_{0{,}3} x = 2\log_{0{,}3} 6 - \log_{0{,}3} 12$

г) $\log_\pi x = 3\log_\pi 4 - 2\log_\pi 6$.

12.Найдите значение выражения:

а)$\frac{\log_3 16}{\log_3 4}$;   б)$\log_2 11 - \log_2 44$;

в)$\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$;   г)$\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$.

13.Что больше:

а)$\log_3 4 + \log_3 7$ или $\log_3(4 + 7)$;
б)$\log_5 2 + \log_5 1,5$ или $\log_5(2 + 1,5)$;
в)$\log_{0,7} 3 + \log_{0,7} 4$ или $\log_{0,7}(3 + 7)$;
г)$\log_{0,6} 1,3 + \log_{0,6} 1,2 +$ или $\log_{0,6}(1,3 + 1,2)$.

Д/З.

1.Вычислите без таблиц и вычислительных инструментов:

а) $\log_{\sqrt{5}} 2 + \log_5 6,25$; б) $\log_{\sqrt{3}} 25 - \log_3 7\frac{58}{81}$.

<u>Практическое занятие №10.</u> Решение логарифмических уравнений и неравенств.

Цели:

Образовательная: продолжить формирование у студентов умений решать логарифмические уравнения.

Воспитательная: воспитание самостоятельности, творческого подхода к решению задач.

Развивающая: развитие логического мышления, навыков сравнительного анализа.

Решение логарифмических уравнений.

1.Уравнения, содержащую переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим. Простейшим логарифмическим уравнение служит уравнения вида $\log_a x =$

b (где a$> 0, \ a \neq 1$).

2. Решение логарифмического уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ основано на том, что такое уравнение равносильно уравнению $f(x)= g(x)$ при дополнительных условиях $f(x) > 0, g(x) > 0$.

3. Проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения в общем случае является необязательной. Можно выявить посторонние корни и с помощью нахождения области определения исходного уравнения (эта область задается системой неравенств $f(x) > 0, g(x) > 0$).

4.При решении логарифмических уравнений часто бывает, полезен метод введения новой переменной.

5. При решении уравнений, содержащих переменную и в основании, и в показателе степени, используется метод логарифмирования. Если при этом в показатели степени содержится логарифм, то обе части уравнения надо прологарифмировать по основанию этого логарифма.

Решите уравнение

Решите уравнения.

1) $\mathbf{\log_5(x - 2) = 1}$

$\log_5(x - 2) = \log_5 5$

x -2=5

x=7

Ответ: 7.

$\mathbf{2)\ \log_7 \log_3 \log_2 x = 0}$

$\log_7 \log_3 \log_2 x = \log_7 7^0$

$\log_3 \log_2 x = 1$

$\log_3 \log_2 x = \log_3 3$

$\log_2 x = 3$

x=2^3

x=8 Ответ:8

3) $\mathbf{\log_2(x^2 + 4x + 3)=3}$

$\log_2(x^2 + 4x + 3)= \log_2 2^3$

$x^2+4x+3=8$

$x^2+4x+3-8=0$

$x^2+4x-5=0$

$x=-5;\ x=1.$

Ответ: -5;1.

4) $\mathbf{\log_5(2x+3)=\log_5(x+1)}$

Решение:

$$\begin{cases} 2x+3=x+1, \\ 2x+3>0, \\ x+1>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-x=1-3, \\ 2x>-3, \\ x-1>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ x>-\frac{3}{2}, \\ x>1. \end{cases}$$

x=-2 не входит в область определения. Ответ: нет корней.

5) $\mathbf{\log_2(x^2-3x+1)=\log_2(2x-3)}$

Решение:

$$\begin{cases} x^2-3x+1=2x-3, \\ 2x-3>0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-3x-2x+1+3=0, \\ 2x>3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=1 \end{array}\right. \\ x>1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ:4.

6). $\mathbf{\log_3(x+6)+\log_3(x-2)=2}$

Решение:

$\log_3(x+6)(x-2)=\log_3 3^2$

$$\begin{cases} (x+6)(x-2)=9, \\ x+6>0, \\ x-2>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+6x-12-9=0, \\ x>-6, \\ x>2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+4x-21=0, \\ x>-6. \\ x>2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-7, \\ x=3, \end{array}\right. \\ x>-6, \\ x>2. \end{cases}$$

x=-7 не входит в область определения.

Ответ: 3.

7) $\boldsymbol{log_2^2}$ **x-**$\mathbf{log_2}\,\boldsymbol{x-2=0}$

Решение:

ОДЗ: x$>$ 0. Обозначим $\log_2 x = y$, тогда

y^2-y-2=0

y_1=-1, y_2=2

$\log_2 = -1,$

x=2^{-1}

x=$\frac{1}{2}$.

$\log_2 x = 2$

x=2^2

x=4

Ответ: $\frac{1}{2}$, 4

8) x$^{\mathbf{\log_2 x+2}}$**=8**

Решение:

Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 2, получим

$\log_2 x^{\log_2(x+2)} = \log_2 8$

$\log_2(x+2)\cdot\log_2 x$=3

log_2^2 x+2$\log_2 x - 3 = 0$

Пусть y=$\log_2 x$, тогда y^2+2y-3=0

$y_1 = -3, \quad y_2 = 1$

$\log_2 x = 1$ $\qquad\qquad$ $\log_2 x = -3$

x=2^1 $\qquad\qquad$ x=2^{-3}

x=2 $\qquad\qquad$ x=$\frac{1}{8}$

Проверка: $2^{\log_2 2+2} = 8$; 2^{1+2}=8; 2^3=8-верно

$\frac{1}{8}^{\log_{\frac{1}{8}}\frac{1}{8}+2} = 8; (\frac{1}{8})^{-3+2} = 8; (\frac{1}{8})^{-1} = 8$- верно. Ответ: $\frac{1}{8}$, 2.

9. $\mathbf{\log_{0,2} 4x + \log_5(x^2 + 75) = 1}$

Решение:

Перейдем к одному основанию 5. $\log_{0,2} 4x = \frac{\log_5 4x}{\log_5 0,2}$

$\frac{\log_5 4x}{\log_5 0,2}+\log_5(x^2 + 75) = \log_5 5$ $/\log_5 0,2 = -1$

$-\log_5 4x+\log_5(x^2 + 75) = \log_5 5$

$\log_5(x^2 + 75) = \log_5 5 + \log_5 4x$

$\log_5(x^2 + 75) = \log_5 5 \cdot 4x$

$\log_5(x^2 + 75) = \log_5 20x$

$x^2+75=20x$

$x^2-20x+75=0$

$x=5$, $x=15$.

Проверка подтверждает, что значения $x=5$ и $x=15$- корни данного уравнения.

10. $\mathbf{\log_x(x^2 - 4x + 4) = 1}$

Решение: $\log_x(x^2 - 4x + 4) = \log_x x$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = x, \\ x^2 - 4x + 4 > 0, \\ x > 0, x \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 - x = 0, \\ (x-2)(x-2) > 0, \\ x > 0, \ x \neq 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ x > 2 \\ x > 0, x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{matrix} x=4 \\ x=1 \end{matrix}\right. \\ x > 2 \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4.

Решение логарифмических неравенств.

1. Неравенство, содержащую переменную только под знаком логарифмов, называется логарифмическим.

2. Решение логарифмических неравенств основано на том, что функция $y=\log_a x$ при $a>0$ является монотонно возрастающей, а при

$0< a < 1$ монотонно убывающей.

$$\begin{cases}\log_a f(x) < \log_a \varphi(x),\\ a > 1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\varphi(x) > 0,\\ a > 1,\\ f(x) > \varphi(x).\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_a f(x) < \log_a \varphi(x),\\ 0 < a < 1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x) > 0,\\ 0 < a < 1\\ f(x) < \varphi(x).\end{cases}$$

3.Логарифмическое неравенство вида $\log_{f(x)} \varphi(x) > b$ эквивалентно двум системам неравенства: $\begin{cases}f(x) > 0,\\ \varphi(x) > 1,\\ f(x) > (\varphi(x))^b.\end{cases}$ и $\begin{cases}\varphi(x) > 0,\\ 0 < \varphi(x) < 1,\\ f(x) < (\varphi(x))^b.\end{cases}$

Аналогично решаются и логарифмические неравенства вида $\log_{f(x)} \varphi(x) < b$.

Пример11: Найти наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

а) $\mathbf{\log_3}(\mathbf{2}x - \mathbf{5}) < 2$.

Решение: $\log_3(2x - 5) < 2$. $\log_3(2x - 5) < \log_3 3^2 \Leftrightarrow \begin{cases}2x - 5 < 9,\\ 2x - 5 > 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x < 14,\\ 2x > 5,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x < 7,\\ x > 2{,}5\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2{,}5 < x < 7$.

Ответ: наибольшее целое число 6.

б)$\mathbf{\log_3}(\mathbf{2}x + \mathbf{1}) - \mathbf{\log_3 5} < 0$

Решение: $\log_3(2x + 1) < \log_3 5 \quad \Leftrightarrow \begin{cases}2x + 1 < 5\\ 2x + 1 > 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x < 4\\ 2x > -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x < 2\\ x > -\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 2.$

ответ: наибольшее целое число 1.

в) $\mathbf{log}_{\frac{1}{3}}(\mathbf{5-2}x) > -2$ **.**

Решение: $\mathbf{log}_{\frac{1}{3}}(\mathbf{5-2}x) > -2$

$\log_{\frac{1}{3}}(5-2x) > \log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3})^{-2}$

$\log_{\frac{1}{3}}(5-2x) > \log_{\frac{1}{3}} 9$

Так как $\frac{1}{3} < 1$ то неравенству удовлетвряют только такие числа x , для которых выполнено условие $0 < 5-2x < 9$,

$5 < -2x < 4,$

$2{,}5 > x > -2,$

$-2 < x < 2{,}5.$

Ответ: наибольшее целое число 2.

г) $\mathbf{log}_{x+\mathbf{0{,}5}}(\mathbf{3}-x) > 1$

Решение: $\log_{x+0{,}5}(3-x) > \log_{x+0{,}5}(x+0{,}5)$

Логарифмическое неравенство эквивалентно совокупности двух систем

неравенств $\begin{cases} 3-x > 0, \\ x+5 > 1, \\ 3-x > x+0{,}5, \end{cases}$ и $\begin{cases} 3-x > 0, \\ 0 < x+0{,}5 < 1, \\ 3-x < x+0{,}5. \end{cases}$

Решаем первую из этих систем:

$$\begin{cases} 3-x > 0, \\ x+5 > 1, \\ 3-x > x+0{,}5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x > -3, \\ x > 1-0{,}5, \\ -x-x > 0{,}5-3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x < 3, \\ x > 0{,}5, \\ -2x > -2{,}5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x > 0{,}5, \\ x < 1{,}25, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 0{,}5 < x < 1{,}25.$

Решаем вторую систему:

$\begin{cases} 3-x>0, \\ 0<x+0{,}5<1, \\ 3-x<x+0{,}5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ -0{,}5<x<0{,}5 \\ x>1{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow$ нет общих решений.

Решением исходного неравенства является объединением двух решений этих систем т.е. $x\in(0{,}5;1{,}25)$

Решите уравнение (1-4):

1 . а)$2^x=10$; б)$(0{,}3)^x=7$; в)$9^x=0{,}7$; г)$10^x=\pi$;
д) е)$\log_{0,4}x=-1$; ж)$\lg x=-2$; з)$\log_9 x=-\frac{1}{2}$.

2. а)$\log_2(3-x)=0$; б)$\log_{0,3}(5+2x)=1$
в)$\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)=-2$; г) $\log_\pi(x^2+2x+3)=\log_\pi 6$.

3. а) $\log_a x=\log_a 3+\log_a 5$
б) $\log_a x=\log_a 12-2\log_a 2$;
в) $\log_a x=\log_{\sqrt{a}}2+\log_{\frac{1}{a}}3$;
г) $\log_a x+\frac{1}{3}\log_a 2=\log_{a^2}3$;
д) $log^2x=1$; е) log_3^2 x-$\log_3 x-2=0$;
ж) log_5^2 x+$\log_{0,2}x=2$; з) log_2^2 (x+1) + $\log_{\frac{1}{4}}(x+1)=5$.

4. а)$\frac{1}{\lg x-6}+\frac{5}{\lg x+2}=1$; б) $\frac{1}{\lg x+1}+\frac{6}{\lg x+5}=1$;
в)$\log_2 x+\frac{4}{\log_x 2}=5$; г) $2\log_{\sqrt{5}}x+\log_x\frac{1}{3}=3$.

Решите систему уравнений.

5. а) $\begin{cases} x+y=7, \\ \lg x+\lg y=1; \end{cases}$
б)$\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9, \\ x+y-20=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2, \\ \log_{48} x + \log_{48} y = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x + y) = 2, \\ \log_5(x - y) = 2\,. \end{cases}$

Решить неравенства (6-8).

6. а) $\log_3 x > 2$; б) $\log_7 x < 0{,}1$;
в) $\log_{0,7} x > 5$; г) $\log_{0,2} x < -2$.

7. а) $\log_2(x^2 - x - 4) < 3$; б) $\log_3(12 - 2x - x^2) > 2$;
в) $\lg(x^2 - x + 8) \geq 1$; г) $\log_\pi(x + 1) + \log_\pi x < \log_\pi 2$.

8. а) $lg^2 x + 2\lg x > 3$; б) $log_2^2 x - \log_2 x \leq 6$;
в) $4^x - 2^x \leq 2$; г) $(\frac{1}{9})^x - 2(\frac{1}{3})^x > 3$.

<u>Практическое занятие №11.</u> Выполнение упражнений по разделу «Корни, степени и логарифмы»

Цель работы: Обобщить и систематизировать знания по разделу «Корни, степени и логарифмы»; закрепить умения использовать полученные знания для выполнения заданий

Вопросы для фронтального опроса.

1. Сформулируйте определение корня n-ой степени.
2. Сформулируйте основные свойства арифметических корней n-ой степени.
3. Степень с произвольным показателем и его свойства
4. Сформулируйте определение логарифмической функции.
5. Сформулируйте основные свойства логарифмической функции

Выполнение упражнений.

1.Вычислите

а) $3^8 \cdot 9^{-3}$; б) $2^6 \cdot 4^{-2}$; в) $5^8 \cdot 125^{-3}$;

г) $\frac{6^3 \cdot 2^4}{3^4}$; д) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$; е) $\frac{9^{\frac{1}{2}} \cdot 21^4}{7^5}$

2.Найдите

а) $\log_5 10 + \log_5 2{,}5$; б) $\log_2 \log_2 \log_3 81$;

в) $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$; д) $\log_2 \log_{25} \log_5 32$

3. Решите уравнение

а) $2^{x+3} = 8^{x-3}$; б) $2^{x+2} + 2^{x+1} = 48$

в) $5^{x+2} = 125^{x-1}$ г) $7^{2x-2} = 343^{x+1}$

4 Решите уравнение

а) $\log_5(x+2) = \log_5 6$; б) $\log_6(3x-1) = \log_6 5$;

в) $\log_8(5x+2) = \log_8 12$; г) $\log_3(4x+3) = \log_3 11$

5.Найдите область определения функции

а) $y = \log_6(2x-4)$; б) $y = \log_7(5x-15)$;

в) $y = \log_4(6x+18)$

6.Решите неравенство

а) $\left(\frac{1}{6}\right)^{3x} < \left(\frac{2}{72}\right)^{x-2}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x} < \left(\frac{1}{8}\right)^{x+\frac{4}{3}}$

7.Решите уравнение

а) $log_3^2 x - \log_3 x - 6 = 0$ б) $log_5^2 x + 4\log_5 x + 3 = 0$;

в) $log_4^2 x + 2\log_4 x + 3 = 0$ г) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$;

д) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$; е) $81^x - 10 \cdot 9^x + 9 = 0$

8.Решите неравенство

а) $5^{2x+5} \geq 125^{x-6}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-4} \geq 8^{3x-6}$; в) $\frac{1}{7^x} \geq 49^{x+3}$;

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-4} \geq 8^{3x-6}$

9. Решите уравнение

а) $2^{x+2} + 3 \cdot 2^{x+1} + 7 \cdot 2^{x} = 68$.

б) $3^{2x+3} - 3^{2x+1} = 162$

Выбрать правильный ответ

1. Найдите значение выражения $\sqrt{65^2 - 56^2}$ **=**

1) 11; 2) 33; 3) 121

2Найдите значение выражения $(\sqrt{13} - \sqrt{7})(\sqrt{13} + \sqrt{7})$

1)20; 2) 36; 3)6 3.

3Найдите значение выражения $5\sqrt[3]{9}\ \sqrt[6]{9}$

1)15; 2) 45; 3)30

4. Найдите значение выражения $\frac{(3x)^3 x^{-9}}{x^{-10} 2x^4}$

1)1,5; 2) 13,5; 3)4,5х .

5. Найдите значение выражения $\frac{a^{3,21} a^{7.36}}{a^{8,57}}$ **при а=12**

1)24; 2) 144; 3)1

6. Найдите значение выражения $\frac{x^{-5} x^{7}}{x^{0}}$ **при х=4**

1) 8; 2) 4; 3)16

7. Найдите значение выражения $5^{0,36} 25^{0,32}$

1)125; 2) 25; 3)5

8. Найдите значение выражения $\frac{3^{6,2}}{9^{1,6}}$

1) 0,3; 2) 27; 3)3

9. Найдите значение выражения $(\log_2 16)(\log_6 36)$

1) 8; 2) 32; 3) 12

10. Найдите значение выражения $\log_5 60 - \log_5 12$

1) 5; 2) 1; 3) 0

11. Найдите значение выражения $\frac{\log_5 25}{\log_5 5}$

1) 5; 2) 2; 3) 125

12. Найдите значение выражения $(\log_5 125)(\log_4 16)$

1) 60; 2) 20; 3) 6

13 Найдите значение выражения $\log_{10} 100$

1) 2; 2) 1000; 3) 10

14. Найдите значение выражения

$\log_{12} 252 - \log_{12} 1,75$

1) 144; 2) 2; 3) 12

<u>Практическое занятие № 12.</u> Решение задач на использование аксиом стереометрии.

Цели:

- изучить материал по теме: «Аксиомы стереометрии и простейшие следствия из них», научиться применять аксиомы при решении задач

- способствовать развитию логического мышления обучающихся.

Контрольные вопросы.

1.Что такое стереометрия?

2.Назовите основные фигуры в пространстве.

3.Сформулируйте три аксиомы стереометрии.

4.Докажите, что через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и при том только одну.

5.Докажите, что если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит плоскости.

6.Докажите, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

Задачи:

Задача 1. Можно ли через точку пересечения двух данных прямых провести третью прямую, не лежащую с ними в одной плоскости? Объясните ответ.

Задача 2. Точки А, В, С лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

Задача 3. Даны три различные пересекающиеся плоскости. Докажите, что если две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения.

Задача 4. Четыре точки не лежат в одной плоскости. Могут ли какие-нибудь три из них лежат на одной прямой? Объясните ответ.

Задача 5. Докажите, что через любую прямую можно провести плоскость.

Задача 6. Докажите, что через любую прямую можно провести по крайней мере по две различные плоскости.

Тестовое задание.
Выбрать правильные ответы.

Вариант 1.

1. Стереометрия – это:

1) раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве;
2) наука о свойствах геометрических фигур;
3) раздел геометрии, в котором изучаются фигуры на плоскости;
4) наука о свойствах треугольников.

2. Основными фигурами в пространстве являются

1) окружность;
2) точка;
3) прямая;
4) плоскость.

3. В пространстве взяты две произвольные точки. Какое из утверждений является верным?

1) они принадлежат одной плоскости;
2) они принадлежат линии пересечения плоскостей;
3) они принадлежат одной прямой;

4) нет правильного ответа.

4. Какая из трех аксиом не относится к аксиомам стереометрии:

1) какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащая этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей;

2) если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну;

3) через две точки можно провести прямую и притом только одну;

4) если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

5. Прямая пересекает одну из параллельных прямых. Какое из утверждений верно?

1) все прямые могут являться скрещивающимися;
2) все прямые могут лежать в одной плоскости;
3) все прямые не лежат в одной плоскости;
4) нет правильного ответа.

<u>Практическое занятие№13.</u> Решение задач по теме «Параллельность плоскостей»

Цели урока:

Образовательная – обобщить теоретические знания по теме «Параллельность плоскостей», сформировать практические умения применять эти знания для решения задач, формировать математическую компетентность студентов;

Развивающая – способствовать развитию пространственного воображения и графической грамотности студентов при решении геометрических задач, развивать математическое мышление, математическую речь, познавательную активность студентов, наблюдательность, умения доказывать и анализировать;

Воспитательная – воспитывать самостоятельность, стремление работать в команде на результат; побуждать к формированию личной позиции в коллективе, создать положительную мотивацию к сознательной учебной деятельности путем вовлечения каждого студенты в активную работу на уроке; воспитывать интерес к геометрии.

Теоретический материал:

Определение: Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Параллельность плоскостей обозначается так: $\alpha \parallel \beta$

Рассмотрим признак параллельности двух плоскостей.

Теорема: Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Если $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$, то $\alpha \parallel \beta$.

Свойства параллельных плоскостей

1^0 Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Если $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \gamma$, $\beta \cap \gamma$, то $a \parallel b$.

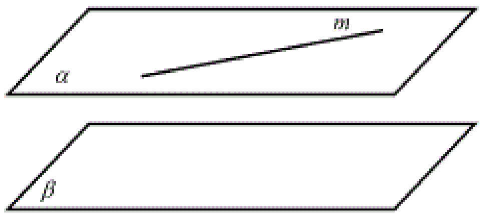
2^0 Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Если $\alpha \parallel \beta$ и $AB \parallel CD$, то $AB = CD$.

Примеры решения задачи:

Задача №1. Плоскости α и β параллельны, прямая m лежит в плоскости α. Докажите, что прямая m параллельна плоскости β.

·Решение:

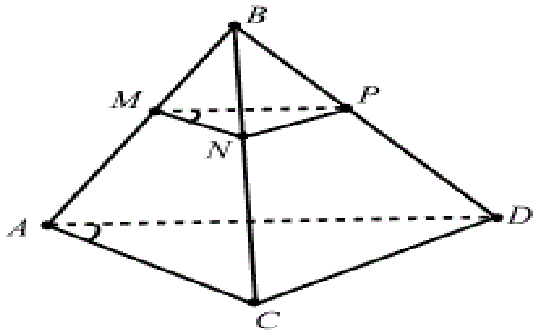


1. По определению, прямая и плоскость параллельны, если они не имеют общих точек.
2. $\alpha \parallel \beta$ по условию, то есть у α и β нет общих точек.
3. $m \subset \alpha$, значит и у m с плоскостью β нет общих точек.
4. $m \parallel \beta$ - по определению.

Задача№ 2. Точка B не лежит в плоскости треугольника ADC, точки M, N и P – середины отрезков BA, BC и BD соответственно:

а) Докажите, что плоскости MNP и ADC параллельны;

б) Найдите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ADC равна 48 см^2.



5. Решение:

Решение:

а) В Δ ABC:MN- средняя линия, II AC;

В Δ BCD: NP- средняя линия, NP II CD

Плоскости MNP и CAD параллельны (по признаку параллельности плоскостей).

$\angle NMP = \angle CAD$ как углы соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами.

б) из а следует, что $\Delta\ MNP \sim \Delta\ CAD$

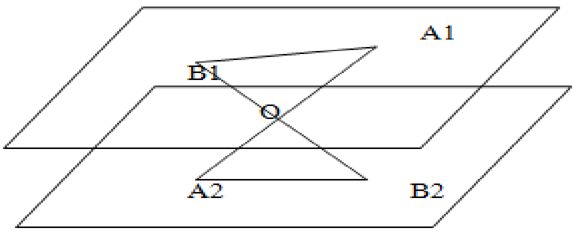
$S\Delta_{MNP} = \frac{1}{2} MN \cdot NP \sin\angle NMP$

$S\Delta_{CAD} = \frac{1}{2} CA \cdot AD \sin\angle CAD$

$$\frac{S_{\Delta\ MNP}}{S_{\Delta\ CAD}} = \frac{\frac{1}{2} MN \cdot NP \sin\angle NMP}{\frac{1}{2} CA \cdot AD \sin\angle CAD} = \frac{MN \cdot NP}{CA \cdot AD} = \frac{\frac{1}{2}CA\frac{1}{2}AD}{CA \cdot AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$SD_{NMP} = \frac{48}{4} = 12(\text{см}^2)$.

Задача №3. Через точку O, лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые l и m. Прямая l пересекает плоскость A и B в точках A_1и A_2 соответственно, прямая m - в точках B_1 и B_2. Найти длину отрезка A_2B_2, если $A_1B_1 = 12$см, $B_1O:OB_2 = 3:4$



Решение.

Через прямые A_1A_2 и B_1B_2 можно повести плоскость, которая пересечёт параллельные плоскости по параллельным прямым A_1B_1 и A_2B_2. У образовавшихся треугольников OA_1B_1 и OA_2B_2 соответствующие углы равны. Углы при вершине O равны как вертикальные, а остальные - как внутренние накрест лежащие у параллельных прямых. Следовательно, треугольники OA_1B_1 и OA_2B_2 подобны. У подобных треугольников соответствующие стороны соотносятся через коэффициент подобия.

Откуда: $OB_1:OB_2 = A_1B_1:A_2B_2$,

Следовательно: $A_2B_2 = 4 \cdot \frac{12}{3} = 16$

Ответ: 16 см.

Задания на закрепление:

Задание 1. Через точку К, не лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые a и b. Прямая a пересекает плоскость α в точке A_1 а плоскость β в точке A_2, и прямая b пересекает эти плоскости в точках B_1 и B_2 соответственно. Найти KB_2 если A_2B_2 относится к A_1B_1 как 4:3, а $KB_1 = 14$ см.

Задание 2. Луч KM пересекает параллельные плоскости α и β в точках M_1 и M_2, а луч KP- в точках P_1 и P_2 соответственно. Вычислите длину отрезка M_1M_2 , если $KM_1 =$ 8см, а $M_1P_1 : M_2P_2 = 4 : 9$

Задание 3. Стороны $\measuredangle N$ пересекают параллельные плоскости α и β в точках A, B и C, D. Вычисли длину отрезка AB, если NA=13 см, NC=20 см и CD=56 см.

<u>Практическое занятие №14.</u> Решение задач на перпендикулярные прямые и плоскости

Цель: Сформировать навык решения задач по изученной теме.

Устные упражнения

Продолжить предложение:

1. Две прямые называются перпендикулярными, если ...
2. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она...
3. Если две плоскости перпендикулярны прямой, то они ...
4. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если ...
5. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости ...
6. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая ...
7. В кубе (рисунок 1)

а) укажите ребра, перпендикулярные плоскости (ABB_1);

б) укажите ребра, перпендикулярные плоскости ($A_1C_1B_1$)

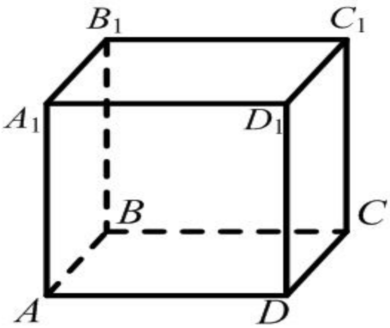


Рисунок 1.

Задача №**1**

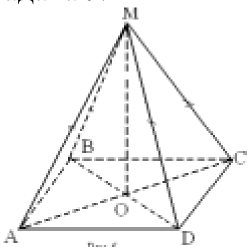


Рис2

<u>Дано</u>: ABCD – параллелограмм,

M ∉ (ABC), MB = MD, MA = MC

<u>Доказать</u>: MO ⊥ (ABC)

<u>Доказательство</u>:

1) Т.к. O – точка пересечения диагоналей параллелограмма, то AO = CO и BO = DO. ∆ BMD - равнобедренный, т. к. BM = MD по условию, значит MO - медиана и высота, т.е. MO ⊥ BD.

2) Аналогично доказывается в ∆ AMC: MO ⊥ AC.

3)Итак, MO ⊥ BD и MO ⊥ AC. а BD и AC – пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости (ABC) ⇒ MO⊥ (ABC) по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Ч.т.д.

Задача №2. Через точки P и Q прямой PQ проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие её соответственно в точках P_1 и Q_1. Найдите P_1Q_1, если PQ =15 см; PP_1 = 21,5 см; QQ_1 = 33,5 см.

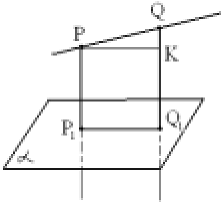


Рис.3

Решение:

1) $PP_1 \perp \alpha$ и $QQ_1 \perp \alpha$ по условию $\Rightarrow PP_1 \parallel QQ_1$ (обосновать);

2) PP_1 и QQ_1 определяют некоторую плоскость β, $\alpha \cap \beta = P_1Q_1$;

3) PP_1Q_1Q - трапеция с основаниями PP_1 и QQ_1, проведём $PK \parallel P_1Q_1$;

4) QK = 33,5 - 21,5 = 12 (см)

$P_1Q_1 = PK = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 3$

Ответ: P_1Q_1 = 9 см.

Задача№3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ AB = 9 см; BC = 8 см; BD = 17 см. Найдите площадь BDD_1B_1.

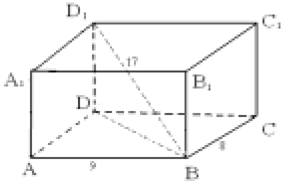


Рис.4

Решение:

1) ΔABD: $\angle BAD = 90°$; $AD = BC$ = 8 см;

$BD = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}$ см

2) ΔDD_1B: $\angle D_1DB = 90°$;

$DD_1 = \sqrt{17^2 - (\sqrt{145})^2} = \sqrt{289 - 145} = \sqrt{144} = 12$см

3) $S_{BDD1B1.} = \sqrt{145} \cdot 12 = 12\sqrt{145}$ см^2

Ответ: $12\sqrt{145}$ см^2

Задача .№4. Четырехугольник $ABCD$ – квадрат. Точка O его центр. Прямая OM перпендикулярна к плоскости квадрата.

а) Докажите, что $MA = MB = MC = MD$

б) Найдите MA, если $AB = 4$ см. $OM = 1$ см.

Напоминание:

Рассмотрим квадрат $ABCD$ (рис. 5). Как известно, точка пересечения диагоналей O равноудалена и от вершин квадрата, и от сторон квадрата. То есть она является центром описанной окружности с радиусом R и центром вписанной окружности с радиусом r. Точка O и называется центром квадрата, т.е. это точка пересечения диагоналей. Если сторона квадрата равна a, то радиус описанной окружности равен:

$$R = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

Радиус вписанной окружности равен:

$$r = \frac{1}{2}a$$

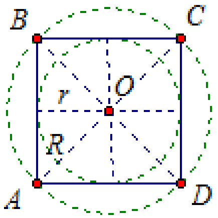


Рис. 5

Дано:

$ABCD$ – квадрат

O – центр квадрата

$OM \perp ABC$

$AB = 4$ см, $OM = 1$ см.

Доказать: $MA = MB = MC = MD$.

Найти: MA

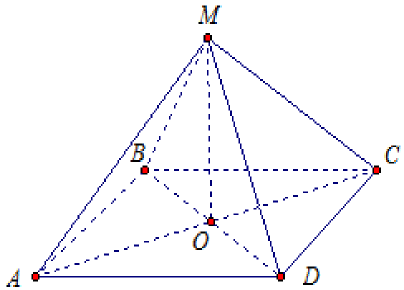


Рис. 5

Прямая MO перпендикулярна плоскости ABC, а значит, прямая MO перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости, в том числе и диагоналям квадрата. Значит, треугольники MOA, MOB, MOC, MOD прямоугольные.

Рассмотрим треугольники MOA, MOB, MOC, MOD. По свойству квадрата $OA = OB = OC = OD$. Значит, эти стороны треугольников равны друг другу. Катет MO общий. Таким образом, прямоугольные треугольники равны по двум катетам. Из равенства прямоугольных треугольников вытекает равенство его гипотенуз: $MA = MB = MC = MD$, что и требовалось доказать. Найдем теперь отрезок MA.

Рассмотрим квадрат $ABCD$. AO – это радиус описанной окружности. Получаем:

$$AO = R = \frac{1}{2}AB\sqrt{2} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\text{ см.}$$

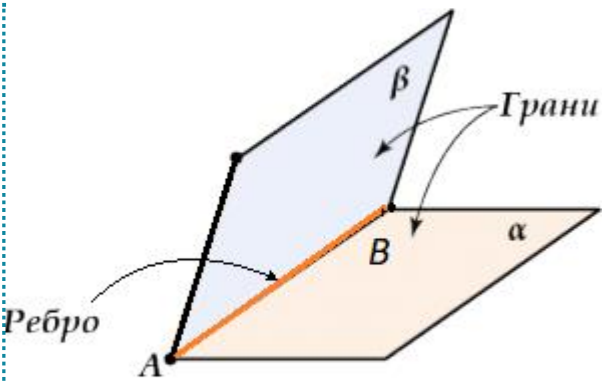
Рассмотрим прямоугольный треугольник MOA. С помощью теоремы Пифагора найдем гипотенузу MA:

$$MA = \sqrt{AO^2 + OM^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3\text{ см}$$

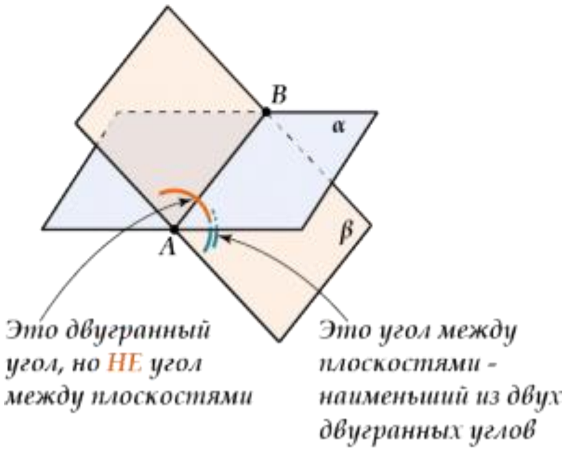
Ответ: 3 см.

<u>Практическое занятие №15. </u>Решение задач на нахождение двугранных и соответствующих их линейных углов

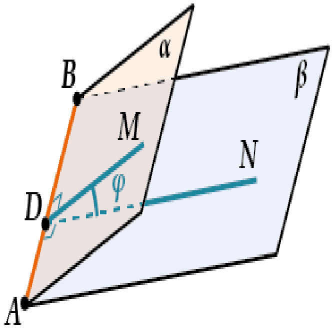
ДВУГРАННЫЙ УГОЛ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ



Двугранный угол – это фигура, образованная двумя полуплоскостям и, исходящими из одной прямой.



Угол между плоскостями – наименьший из двугранных углов, образованных при пересечении плоскостей. Двугранный угол может быть и острым, и тупым, а угол между плоскостями только острым! НЕ ПУТАЙ!



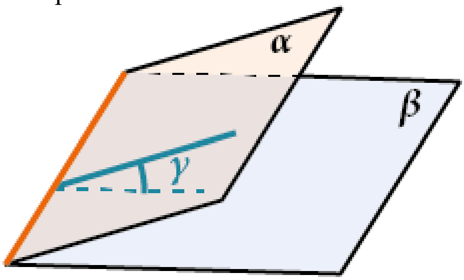
-Двугранный угол измеряется величиной своего линейного угла.

-Чтобы найти величину двугранного угла или угла между плоскостями, нужно построить линейный угол и найти величину этого линейного угла.

Прямой двугранный угол – двугранный угол, который равен 90∘ ∘, то есть тот, у которого линейный угол равен 90∘

Два способа найти угол между плоскостями:

При **геометрическом способе** нужно сначала построить угол двугранного угла, а потом искать этот линейный угол с помощью знаний из планиметрии.



Алгебраический способ – это применение метода координат – формула для нахождения угла между плоскостями.

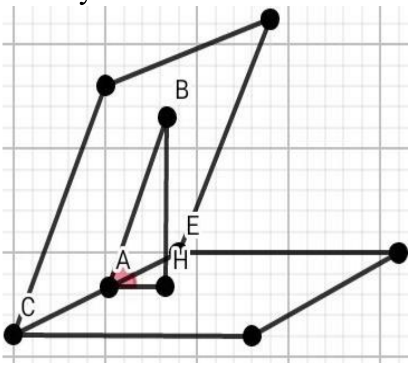
$$\cos\gamma=\frac{A_1A2+B_1B2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

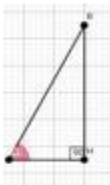
Здесь A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 - коэффициенты уравнений плоскостей α и β соответственно.

α: $A_1x+B_1y+C_1z+D=0$

β: $A_2x+B_2y+C_2z+D=0$

Задача 1. Двугранный угол равен 30°. На одной грани двугранного угла дана точка B, расстояние от которой до ребра равно 24 см. Чему равно расстояние от точки B до второй грани двугранного угла?





BA – наклонная B

A перпендикулярен CE (ребро двугранного угла)

BH – перпендикуляр

BH перпендикулярен AH

Значит, по теореме о трёх перпендикулярах AH, как проекция наклонной BA на плоскость, в которой лежит эта проекция, перпендикулярен CE.

Из этого следует, что угол BAH – линейный угол данного двугранного угла, то есть угол BAH = 30°

Рассмотрим Δ BAH (угол AHB = 90°):Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы $\rightarrow BH = \frac{1}{2} \times BA = \frac{1}{2} \times 24 = 12$ см

Ответ: BH = 12 см.

Задача 2. В двугранном угле, грани которого перпендикулярны, дана точка А. Расстояния от точки до граней АА1=7 см и АВ1=24 см. Рассчитай расстояние АВ до ребра двухгранного угла.

Решение:

Расстояние АВ до ребра двугранного угла - это гипотенуза прямоугольного треугольника, где AA_1=7 см и AB_1=24 см это катеты.

АВ = $\sqrt{7^2+24^2} = \sqrt{49+576} = \sqrt{625}$ = 25 см.

Задача 3. Две точки лежат на грани двугранного угла и удалены от второй грани соответственно на 48 и 60 см. Одна из этих точек отстает от ребра двугранного угла на 50 см. Найдите расстояние от второй точки до ребра двугранного угла.

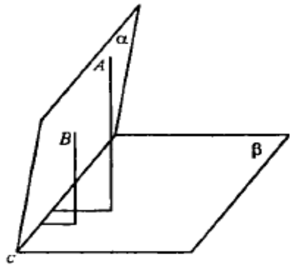
Дано:

$\alpha \cap \beta$=с, А$\in \alpha$, В $\in \alpha$,

Р(А, β)=60см, Р(В, β)=48см.

Расстояние от одной из точек до с равно 50.

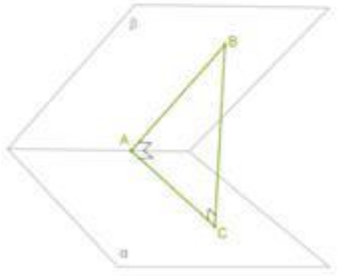
Найти расттояние от другой.



Решение: ТК $48 < 50 < 60$, то р(В,с)=50$\Rightarrow$sin$(\angle(\alpha,\beta))=\frac{48}{50}=\frac{24}{25} \Rightarrow$ р(А,с)= $\frac{60}{\sin(\angle(\alpha,\beta)}=$

$= \frac{60}{\frac{24}{25}} = \frac{60\cdot 25}{24} = \frac{125}{2}$=62,5

Задача 4. Двугранный угол равен 30°. На одной грани двугранного угла дана точка В, расстояние от которой до ребра равно 24 см. Чему равно расстояние от точки В до второй грани двугранного угла?



Дано: α ∩ β

∠BAC = 30°

BA = 24 см

Найти: BC

Решение:

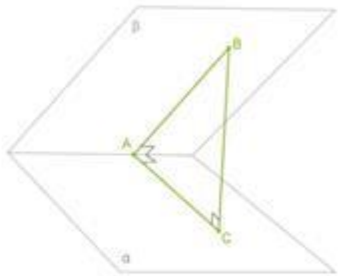
1) Рассмотрим ΔABC - прямоугольный, AB - гипотенуза, BC - противолежащий катет.

2) По свойству прямоугольного треугольника (катет, лежащий против угла в 30° равен половине гипотенузы)

Значит BC = 0,5 × AB = 0,5 × 24 = 12 (см)

Ответ: 12 см

Задача 5. Двугранный угол равен 45°. На одной грани двугранного угла дана точка *B*, расстояние от которой до ребра равно 12 см. Чему равно расстояние от точки *B* до второй грани двугранного угла?



Дано: α ∩ β

∠BAC = 45°

BA = 12 см

Найти: BC

Решение:

1) Рассмотрим ΔABC - прямоугольный, AB - гипотенуза, BC - противолежащий катет.

2) По свойству прямоугольного треугольника (сумма острых углов равна 90°) получаем, что $\angle BAC = \angle CBA = 45°$, значит CB = AC = x;

3) По теореме Пифагора, найдем BC:

$AB^2 = AC^2+BC^2$

$12^2 = x^2 + x^2$

$144 = 2\ x^2$ поделим всё уравнение на 2

$x^2 = 72$

$x=\sqrt{72}$

$x=\sqrt{36 * 2}$

$x=6\sqrt{2}$

Значит BC = $6\sqrt{2}$ (см)

Ответ: $6\sqrt{2}$ см

Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Двугранный угол равен 30°. На одной грани двугранного угла дана точка B, расстояние от которой до ребра равно 48 см. Чему равно расстояние от точки B до второй грани двугранного угла?

Задача 2. Двугранный угол равен 45°. На одной грани двугранного угла дана точка *B*, расстояние от которой до ребра равно 16 см. Чему равно расстояние от точки *B* до второй грани двугранного угла?

Вариант 2.

Задача 1. Двугранный угол равен 30°. На одной грани двугранного угла дана точка B, расстояние от которой до ребра равно 42 см. Чему равно расстояние от точки B до второй грани двугранного угла?

Задача 2. Двугранный угол равен 45°. На одной грани двугранного угла дана точка *B*, расстояние от которой до ребра равно 10 см. Чему равно расстояние от точки *B* до второй грани двугранного угла?

<u>Практическое занятие №16.</u> Решение задач по разделу «Прямые и плоскости в пространстве»

Задача 1. Из данной точки до плоскости проведены перпендикуляр и наклонная. Длина перпендикуляра равна длине проекции наклонной. Найдите угол между перпендикуляром и наклонной

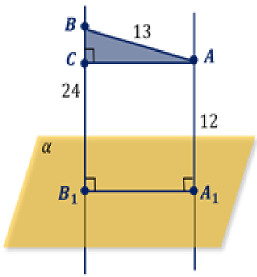
Решение:

За точку обозначим А, перпендикуляр к плоскости- АВ, наклонная-АС.

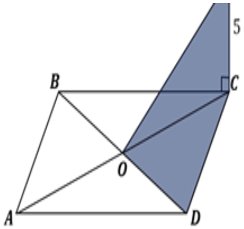
пусть АВ=х, тогда АС=2х найдем проекцию наклонной. Проекция точки А является В, проекция точки С является С, тогда проекция наклонной АС является ВС.

Рассмотрим треугольник АВС-прямоугольный(В=90), АВ-катет, АС-гипотенуза, в два раза большая катета, следовательно, по свойству - если в прямоугольном треугольнике катет вдвое меньше гипотенузы, то угол противолежащий угол равен 30 градусам. т.е. угол АСВ=30 градусов. а угол между наклонной и ее проекцией и есть угол АСВ

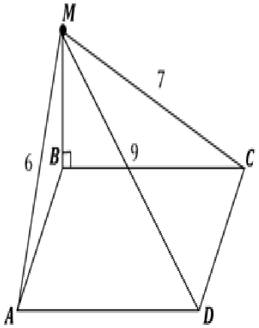
<u>Задача 2</u> Отрезок АВ не имеет общих точек с плоскостью α. Через точки А и В проведены прямые, перпендикулярные плоскости и пересекающие её в точках A_1и B_1 соответственно. Вычислите длину отрезка A_1B_1, если АВ=13 см, AA_1=12 см и BB_1=24 см.



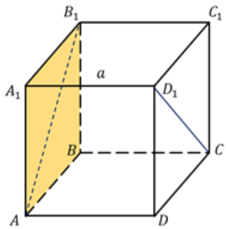
Задача 3. Периметр ромба АВСД равен 60 см, диагональ ВД=18 см. Из вершины С восстановлен перпендикуляр СМ, равный 5 см. Найдите расстояние от точки М до прямой ВД.



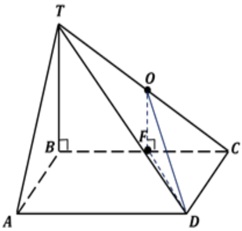
Задача 4. Из вершины В прямоугольник АВСД восстановлен перпендикуляр ВМ к плоскости прямоугольника. Расстояния от точки М до остальных вершин прямоугольника равны 6 см, 7 см и 9 см. Найдите длину перпендикуляра МВ.



Задача 5. Дан куб. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и $СД_1$, если длина ребра куба равна а.



Задача 6. TABCD – четырёхугольная пирамида, основание которой – квадрат ABCD. Боковое ребро TB перпендикулярно плоскости основания, а точка O – середина ребра TC. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую DO и перпендикулярной плоскости основания, если TB=BC=a.

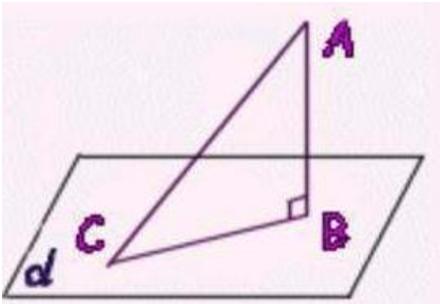


Задача 7. Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB=10 см и AC= 17 см. Зная, что проекции этих наклонных на плоскость относятся как 2:5, найти расстояние от точки A до

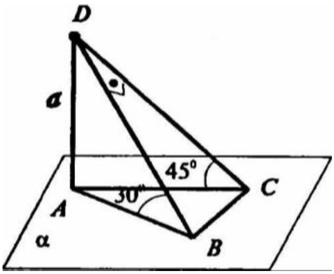
плоскости α

Задача 8. Из точки А к плоскости проведены две наклонные АВ и АС, длины которых относятся как 5: 8. Найдите расстояние от точки А до плоскости в, если проекции наклонных на эту плоскость соответственно равны 7 см и 32 см.

Задача 9. Найдите проекцию наклонной к плоскости, если известно, что наклонная равна 29 см, а перпендикуляр равен 20 см.



Задача 10. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы 45° и 30°, а между собой прямой угол. Найдите расстояние между концами наклонных.



<u>Практическое занятие № 17.</u> Выполнение упражнений по разделу «Прямые и плоскости в пространстве»

Вариант 1.

1. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если

2. Если одна из параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то ….

3. Точка Е не принадлежит плоскости прямоугольника ABCD, BE $\perp$ AB, BE $\perp$ BC. Тогда прямая и плоскость BCE:

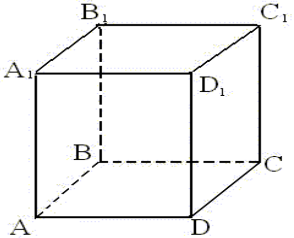
а) параллельны,

б) перпендикулярны,

в) скрещиваются,

г) прямая лежит в плоскости,

д) перпендикулярны, но не пересекаются.



.

4. Назовите:1) рёбра, перпендикулярные к плоскости (DCC_1)

2) плоскости, перпендикулярные ребру BB_1

5. Определите взаимное расположение:

1) прямой CC_1 и плоскости (DCB)

2) прямой D_1C_1 и плоскости (DCB)

6. Через вершину острого угла прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояния от точки D до вершин B и C, если AC=a, BC=b, AD=c.

Вариант 2.

1.Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если……

2. Если плоскость перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она…

3. Расстояния от точки М до сторон прямоугольного треугольника АВС (угол С равен 90°) равны. Какое из следующих утверждений верно?

а) плоскости МАВ и АВС перпендикулярны,

б) плоскости МВС и АВС перпендикулярны,

в) плоскости МАС и АВС перпендикулярны,

г) плоскости МАС и МВС перпендикулярны,

д) условия в пунктах а - г неверны.

4. Назовите:

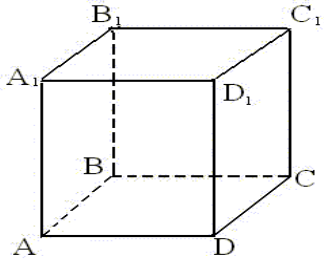
1) рёбра, перпендикулярные к плоскости (BCC_1)

2) плоскости, перпендикулярные ребру AA_1

5. Определите взаимное расположение:

1) прямой DD_1 и плоскости (DCB)

2) прямой D_1C_1 и плоскости (BCB_1)



6. Отрезок ВМ перпендикулярен к плоскости прямоугольника ABCD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна к плоскости МВС.

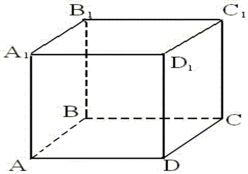
Вариант 3.

1. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они…

2. Если две плоскости перпендикулярны к одной прямой, то они… (

3. Прямая*а* перпендикулярна к прямым *с* и *в*, лежащим в плоскости α, прямая *а* перпендикулярна к плоскости α. Каково взаимное расположение прямых *с* и *в*?

а) параллельны, б) пересекаются, в) параллельны или пересекаются, г) совпадают, д) определить нельзя.



4. Назовите:

1) рёбра, перпендикулярные к плоскости (DCA)

2) плоскости, перпендикулярные ребру BA

5. Определите взаимное расположение:

1) прямой CA и плоскости (DCB)

2) прямой D_1C_1 и плоскости (AA_1D)

6. Прямые PP_1 и QQ_1 перпендикулярны плоскости и пересекают плоскость соответственно в точках P_1 и Q_1. Известно, что $PP_1=21.5$, $QQ_1=33.5$, $PQ=15$. найти расстояние между прямыми PP_1 и QQ_1.

Выбрать правильные ответы.

Вариант 1.

1.Стереометрия – это:

5) раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве;
6) наука о свойствах геометрических фигур;
7) раздел геометрии, в котором изучаются фигуры на плоскости;
8) наука о свойствах треугольников.

2.В пространстве взяты две произвольные точки. Какое из утверждений является верным?

5) они принадлежат одной плоскости;
6) они принадлежат линии пересечения плоскостей;
7) они принадлежат одной прямой;
8) нет правильного ответа.

3.Какая из трех аксиом не относится к аксиомам стереометрии:

5) какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащая этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей;

6) если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну;

7) через две точки можно провести прямую и притом только одну;

8) если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

4. Какого варианта взаимного расположения прямой и плоскости не существует?

1) прямая параллельна плоскости;
2) прямая перпендикулярна плоскости;
3) прямая лежит на плоскости;
4) все варианты существуют

5.Две прямые перпендикулярны одной плоскости. Какое их взаимное расположение?

1) не лежат в одной плоскости;
2) пересекаются;
3) перпендикулярны;
4) параллельны.

6.Две прямые на плоскости называются перпендикулярными, если

1) они пересекаются под прямым углом;
2) они не пересекаются;
3) они пересекаются под углом меньше 90^0;

затрудняюсь ответить

7.Прямая перпендикулярна плоскости перпендикулярна

1) одной прямой этой плоскости;

2) двум прямым этой плоскости;
3) каждой прямой этой плоскости;
4) нет правильного ответа.

8.Проекцией наклонной называется
1) основание наклонной;
2) отрезок, соединяющий основание перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки;
3) отрезок, соединяющий основание перпендикуляра и наклонной, проведенных из разных точек плоскости;
4) затрудняюсь ответить.

9.Наклонная, перпендикуляр и проекция наклонной образуют
1) равносторонний треугольник;
2) равнобедренный треугольник;
3) остроугольный треугольник;
4) прямоугольный треугольник.

10.У равных наклонных
1) равные проекции;
2) параллельные проекции;
3) перпендикулярные проекции;
4) нет правильного ответа.

11.Наклонная, длина которой 8 см, образует с плоскостью угол 60 градусов. Чему равна длина ее проекции?
1) 2 см;
2) 16 см;
3) 4 см;.

12.Сколько плоскостей можно провести через наклонную и ее проекцию?
1) Множество;

2) 3;
3) 2;
4) 1 .

Вариант 2.

1.Основными фигурами в пространстве являются

5) окружность;
6) точка;
7) прямая;
8) плоскость.

2.Прямая пересекает одну из параллельных прямых. Какое из утверждений верно?

5) все прямые могут являться скрещивающимися;
6) все прямые могут лежать в одной плоскости;
7) все прямые не лежат в одной плоскости;
8) нет правильного ответа.

3.Если две прямые лежат в одной плоскости и не пересекаются, то они называются

1) скрещивающимися;
2) параллельными;
3) накрест лежащими;
4) затрудняюсь ответить;

4.Если прямая и плоскость не пересекаются, то они называются

1) скрещивающимися;
2) перпендикулярными;
3) параллельными;
4) затрудняюсь ответить.

5.Из точки А параллелограмма АВСМ восстановлен перпендикуляр АК. Какое взаимное расположение прямых АК и СМ?

1) скрещивающиеся;
2) параллельны;
3) перпендикулярны;
4) пересекаются.

6.Прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей. Перпендикулярна ли она второй?

1) да;
2) нет;
3) не всегда;

7.Перпендикуляр – это

1) отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости;
2) отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости;
3) отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, параллельной плоскости;
4) затрудняюсь ответить.

8.Наклонная – это

1) отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости;
2) любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости;
3) отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, параллельной плоскости;
4) затрудняюсь ответить.

9.Сколько точек пересечения с плоскостью имеет наклонная?

1) 1;
2) 2;
3) 4;
4) 0.

10. Сколько наклонных можно провести через заданную точку пространства к плоскости?

1) 1;
2) 2;
3) 3;
4) Много.

11. Длина наклонной 17 см, а длина проекции 8см. чему равна длина перпендикуляра?

1) 9 см;
2) 15 см;
3) 25 см;
4) нет правильного ответа.

12. Углом между прямой и плоскостью называется

1) угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость;
2) угол между этой прямой и перпендикуляром, опущенным из любой точки прямой;
3) прямой угол;
4) затрудняюсь ответить.

<u>Практическое занятие №18.</u> Решение простейших комбинаторных задач

Задача. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

Решение:

На первое место можно положить любой из четырех шариков, на второе – любой из трех оставшихся, на третье – любой из двух оставшихся, а на четвертое – последний оставшийся шарик. Итак, ответ: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$.

Задача. На танцплощадке собрались 7 юношей и 7 девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?

Ответ: 7!

Правило умножения заключается в том, что для того, чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний А и В, следует перемножить число всех исходов испытания А и число всех исходов испытания В.

Задача. Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 6, 7, 9?

Решение. Перечислим все возможные варианты:

20 22 26 30 32 36 60 62 66 70 72 76 90 92 96

Используя правило умножения, получаем: 5•3=15

Сочетаниями из n элементов по k называются соединения, которые можно образовать из n элементов, собирая в каждое соединение k элементов; при этом соединения отличаются друг от друга только самими элементами (различие порядка их расположения во внимание не принимается).

Например, из 3 элементов (a,b,c) по 2 можно образовать следующие сочетания: ab, ac, bc.

Число сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k. Оно равно

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Задача. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 3 членов, можно образовать из 10 преподавателей?

Решение: По формуле находим:

$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} =$ 120 комиссий

Ответ: 120 комиссий

Размещением называется расположение “предметов” на некоторых “местах” при условии, что каждое место занято в точности одним предметом и все предметы различны.

В отличие от сочетаний размещения учитывают порядок следования предметов. Так, например, наборы <2,1,3> и < 3,2,1 >

являются различными, хотя состоят из одних и тех же элементов {1,2,3} (то есть, совпадают как сочетания).

$$A_n^k = n^{\underline{k}} = (n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k}k!.$$

Задача. В группе обучается 24 студента. Сколькими способами можно составить график дежурства по техникуму, если группа дежурных состоит из трех студентов?

Решение: число способов равно числу размещений из 24 элементов по 3, т.е. равно A_{24}^3. По формуле находим

$$A_{24}^3 = \frac{24!}{(24-3)!} = \frac{24!}{21!} = \frac{21!*22*23*24}{21!} = 22*23*24 = 12144$$

Ответ: 12144 способа

Проверь себя

1.Определите вид соединений:

а) Соединения из *n* элементов, отличающиеся друг от друга только порядком расположения в них элементов, называются __________*перестановки*

б) Соединения из *m* элементов по *n*, отличающихся друг от друга только составом элементов, называются ________________*сочетания*

в) Соединения из *m* элементов по *n*, отличающихся друг от друга составом элементом и порядком их расположения, называются _________ *размещения*

2.Восстановите соответствие типов соединений и формул для их подсчёта

$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ А. 1)сочетания

$P_n = n!$ В. 2)размещения

$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!}$ С. 3)перестановки

3. Сколькими способами из класса, где учатся 24 ученика, можно выбрать: а) двух дежурных; б) старосту и помощника старосты?

Ответ: а)276; б)552.

4. «Проказница Мартышка, Осёл, Козёл да косолапый Мишка задумали сыграть квартет». Сколькими способами они могут выбрать каждый для себя по одному инструменту из 10 данных различных инструментов?

Ответ: $A_{10}^{4} = 5040$

Упражнение на закрепление учебного материала:

Задача 1.1. Имеется пять видов конвертов без марок и четыре вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

Задача 1.2. Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, из которых ровно 3 лежат на одной прямой?

Задача 1.3. Сколько словарей нужно издать, чтобы переводить с любого из 5 языков на любой другой из этих языков.

Задача 1.4. Есть пятиразрядный цифровой замок. Кодовое устройство замка состоит из пяти вращающихся дисков, каждый из которых имеет шесть цифр от 0 до 5. Только одна комбинация из пяти цифр позволяет открыть замок. Сколько таких комбинаций?

Задача 1.5. Сколькими способами можно упорядочить множество {1,2,..., 2n} так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

Задача 1.6. Сколькими способами можно упорядочить множество {1,2,..., n} так, чтобы числа 1,2,3 стояли рядом и в порядке возрастания?

Задача 1.7. Какое количество различных символов (букв, чисел и т. д.) можно передать не более чем пятью знаками кода Морзе, использующего точку (•) и тире (-)?

Задача 1.8. Автомобильные номера состоят из трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, если используются 32 буквы алфавита.

Задача 1.9. (сказка) Жил-был странный правитель. Решил он своих подданных различать не по именам, а по зубам. Себе все 32 зуба оставил, как и были белыми. Ближайшим подданным повелел один зуб на разных позициях окрасить в черный цвет, чтобы их отличать. Далее шли вассалы с двумя черными зубами на разных позициях, и так далее. В самых низших слоях были люди с одним белым зубом на разных местах, и был один только с черными. Сколько было подданных у правителя?

Задача 1.10. Сколько машинных (различающихся по написанию и не обязательно имеющих смысл) слов можно составить из букв слова КОЛОКОЛ, из букв слова ВОДОРОД?

Задача 1.11. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом?

Задача 1.12. Сколькими способами 9 одинаковых конфет можно разложить по пяти различным пакетам, если ни один из пакетов не должен быть пустым? Тот же вопрос, но пакеты могут быть пустыми.

Практическое занятие № 19. Решение задач.

Цель: Закрепление умений и знаний.

Задача№1. Найти длину отрезка$\overrightarrow{AB}$, если А(1;1) и В(4;-3).

Решение: По формуле $\left|\overrightarrow{AB}\right|= \sqrt{(X_в - X_A)^2 + (y_в - y_A)^2}$ находим

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|= \sqrt{(4-1)^2 + (-3-1)^2} = 5$$

Задача №2. Даны точки А (4;0), В (7;4) и С(-4;6). Найти длины векторов: 1) $\overrightarrow{AB}$**, 2)** $\overrightarrow{BC}$**,** $\overrightarrow{CA}$**.**

Задача № 3. Вычислить периметр треугольника, вершинами которого служат точки:

1) А (4;0), В (7;4) и С (-4;6).
2) А (6;7), В (3;3) и С (1; -5).

Задача №4. Найти косинусы углов, образуемых заданными векторами с осями координат: (*решение под руководством преподавателя*)

1) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, A(2;-3); B(1;4).$

2) $\vec{b} = \overrightarrow{BC}, B(-1;1); C(2;5).$

1)Решение: По формуле $\cos\alpha = \frac{X_B - X_A}{\sqrt{(X_в - X_A)^2 + (y_в - y_A)^2}}$;

$\cos\beta = \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(X_в - X_A)^2 + (y_в - y_A)^2}}$

$$\cos\alpha = \frac{X_B - X_A}{\sqrt{(X_в - X_A)^2 + (y_в - y_A)^2}} = \frac{1-2}{\sqrt{(1-2)^2 + (4+3)^2}} = -0{,}1\sqrt{2}.$$

$$\cos\beta = \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(X_в - X_A)^2 + (y_в - y_A)^2}} = \frac{4+3}{\sqrt{(1-2)^2 + (4+3)^2}} = 0{,}7\sqrt{2}.$$

2) $\cos\alpha = \frac{X_B - X_A}{\sqrt{(X_в - X_A)^2 + (y_в - y_A)^2}} = \frac{2+1}{\sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2}} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$

$\cos\beta = \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(X_в - X_A)^2 + (y_в - y_A)^2}} = \frac{5-1}{\sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2}} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$

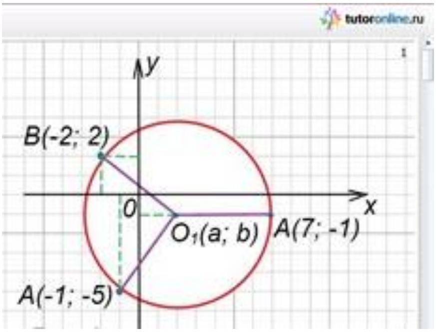
Задача № 5. Найти косинусы углов, образуемых заданными векторами с осями координат:

1) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, A(-2;-3); B(3;9).$

2) $\vec{b} = \overrightarrow{BC}, B(4;-1); C(0;2).$

Задача № 6. Найти координаты точки O_1, которая равноудалена от трех точек A (7; -1) и

B(-2; 2) и C(-1; -5). (*решение под руководством преподавателя*)

Решение.  рис.1

Из формулировки условия задачи следует, что $O_1A = O_1B = O_1C$. Пусть искомая точка O_1 имеет координаты (a; b). По формуле $d = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (У_A - У_B)^2}$ найдем:

$O_1A = \sqrt{(a-7)^2 + (b+1)^2}$

$O_1B = \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2}$

$O_1C = \sqrt{(a+1)^2 + (b+5)^2}$

Составим систему из двух уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(a-7)^2 + (b+1)^2} = \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2} \\ \sqrt{(a-7)^2 + (b+1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (b+5)^2} \end{cases}$$

После возведения в квадрат левой и правой частей уравнений запишем:

$$\begin{cases} (a-7)^2 + (b+1)^2 = (a+2)^2 + (b-2)^2 \\ (a-7)^2 + (b+1)^2 = (a+1)^2 + (b+5)^2 \end{cases}$$

Упростив,

запишем

$$\begin{cases} a^2 - 14a + 49 + b^2 + 2b + 1 = a^2 + 4a + 4 + b^2 - 4b + 4 \\ a^2 - 14a + 49 + b^2 + 2b + 1 = a^2 + 2a + 1 + b^2 + 10b + 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 14a + 49 + b^2 + 2b + 1 - a^2 - 4a - 4 - b^2 + 4b - 4 = 0 \\ a^2 - 14a + 49 + b^2 + 2b + 1 - a^2 - 2a - 1 - b^2 - 10b - 25 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -18a + 6b + 42 = 0 \\ -16a - 8b + 24 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a + b + 7 = 0 \\ -2a - b + 3 = 0 \end{cases}$$

Решив систему, получим: -5a+10=0

a=2, b=3a-7

b=-1

Точка O_1(2; -1) равноудалена от трех заданных в условии точек, которые не лежат на одной прямой. Эта точка – есть центр окружности, проходящей через три заданные точки **(рис. 1)**.

Задача №7. Найти координаты точки O_1, которая равноудалена от трех точек A (10; 7) и B (-4; -7) и C (12; -7).

Задача № 8. Вычислите координаты точки на оси Оу, равноудаленный от точек

A(-4;0) и B(-3;-7) (*решение под руководством преподавателя*)

Решение:

Пусть C(0;y) -искомая точка. Тогда AC=$\sqrt{(0+4)^2+(0-y)^2}$; BC=$\sqrt{(0+3)^2+(y+7)^2}$

Приравнивая расстояния от нее до данных точек, получим:

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-y)^2}=\sqrt{(0+3)^2+(y+7)^2}$$

$(0+4)^2+(0-y)^2=(0+3)^2+(y+7)^2$

$16+y^2=9+y^2+14y+49$

$16+y^2-9-y^2-14y-49=0$

$-14y-42=0$

$y=-3$

Значит, искомая точка (0;-3).

Задача №9. Вычислите координаты точки на оси Оу, равноудаленный от точек A (-3;-1) и B(6;2).

Задача №10. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=(-3;2)$ и $\vec{b}=(4;3)$

Решение: $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-3)\cdot4+2\cdot3=-6.$

Задача №11. Найдите скалярное произведение векторов:

1) $\vec{a} = (\mathbf{1/2}; \mathbf{2/5})$и $\vec{\boldsymbol{b}} = (\mathbf{2/3}; \mathbf{5/6})$
2) $\vec{a} = (\mathbf{2}; \mathbf{4})$и $\vec{\boldsymbol{b}} = (\mathbf{4}; \mathbf{1})$

Задача №12. Даны точки А (-2;4), В (3;-6), С(4;-2) и Д (1;5). Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Задача№13. Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если А(3;1), В(7;4), С(3;2) и Д(6;6).

Задача№14. Проверьте перпендикулярны ли векторы:

1) $\vec{a}$=(-3;5) и $\vec{b} = (5; 3)$;
2) $\vec{c}$=(2;-4) и $\vec{d} = (2; -4)$;
3) $\vec{p}$=(-3;-4) и $\vec{g} = (5; 1)$;

<u>Практическое занятие № 20.</u> Решение задач. Векторы на плоскости и в пространстве. Действия над векторами.

Формулы для вычисления длины вектора, угла между векторами, расстояние между двумя точками.

Цель: закрепить умения и навыки вычисления длины вектора, угла между векторами, расстояние между двумя точками.

На плоскости:

Длина вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (X_B - X_A; Y_B - Y_A)$ **находится по формуле**

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}.$$

Углы, образуемые вектором $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ **с осями координат** O_x **и** O_y **находятся по формулам**

$$\cos\alpha = \frac{X_B - X_A}{\sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}}.$$

$\cos\boldsymbol{\beta} = \frac{Y_B - Y_A}{\sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}}.$

Задача 1. Найти косинусы углов, образуемых заданными векторами с осями координат: 1) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ A (2;-3) B(1;4);

2) $\vec{в} = \overrightarrow{BC}$ B(-1;1); C(2;5)

Задача 2. Найдите косинусы углов, образуемых заданными векторами с осями координат:) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ A (-2;-3) B(3;9);

2) $\vec{в} = \overrightarrow{BC}$ B(4;-1); C(0;2).

В пространстве:

Длина вектора (расстояние между двумя точками) вычисляется по формуле:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$

Деление отрезка в данном отношении. Если отрезок AB разделить точкой C в данном отношении AC: CB = λ, то координаты точки C находятся по формулам:

$X_c = \frac{X_A + \lambda X_B}{1+\lambda}$; $Y_c = \frac{Y_A + \lambda Y_B}{1+\lambda}$; $X_c = \frac{Z_A + \lambda Z_B}{1+\lambda}$

при λ =1, получается формулы для нахождения координат середины отрезка

$X_c = \frac{X_A + X_B}{2}$; $Y_c = \frac{Y_A + Y_B}{2}$; $X_c = \frac{Z_A + Z_B}{2}$

Углы, образуемые радиус – вектором $\vec{a}$ с координатными осями O_x, O_y, O_z вычисляется по формулам

$\cos\alpha = \frac{x}{|a|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\cos\beta = \frac{y}{|a|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\cos\gamma = \frac{z}{|a|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Задача 3. Отрезок AB, где A (7;2; -3), B (-5;0;40 разделен точкой C в отношении λ = AC: CB=1:5. Найти координаты точки C.

Задача 4. Найти косинусы углов, которые вектор $\vec{a} = \vec{\imath} -$

$2\vec{j} + 2\vec{k}$ образует с базисным векторами.

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1\,; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2\,; y_2; z_2)$

заданных своими координатами. находятся по формуле

$\vec{a} \times \vec{b}$=$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Угол между векторами $\vec{a} = (x_1\,; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2\,; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле

$$\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{a * \mathrm{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} * \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

Условие перпендикулярности векторов $\vec{a} = (x_1\,; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2\,; y_2; z_2)$ имеет вид $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

Задача 5. Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{\imath}$ $+3\vec{\jmath} + \vec{k}$. Найти угол между ними.

Задача 6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$ =60°. Зная, что $|\vec{a}|$=6 и $|\vec{b}|$=3 вычислить $(2\vec{a} + \vec{b})$*$(2\vec{a} - 3\vec{b})$.

Задача 7. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$(-3;2) и $\vec{b}$ =(4;3).

Задача 8. Вычислить угол между векторами $\vec{a}$(-4;3) и $\vec{b}$ =(3;-4).

Задача 9. Проверить, перпендикулярны ли векторы:

1) $\vec{a}$(-3;2) и $\vec{b}$ =(4;6);

2) $\vec{c}\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{5}\right)$ и $\vec{d} = \left(\frac{4}{3}; 5\right)$;

3) $\vec{p}$(-2;5) и $\vec{q}$ =(3;1).

Задача 10. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 120°. Зная, что $|\vec{a}|$=4 и $|\vec{b}|$=5 вычислите $(2\vec{a} - 3\vec{b})^2$.

Задача 11. Найти скалярное произведение векторов:

1) $\overrightarrow{a}$ =(2;4) и $\vec{b}$ =(4;1).

2) $\overrightarrow{c}$ =($\frac{1}{2}$;$\frac{2}{5}$) и $\vec{d}$ =($\frac{2}{3}$;$\frac{5}{6}$).

Задача 12. Найти скалярное произведение векторов

1) $\vec{a} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i}$ -$4\vec{j}$.

2)$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, если A (1;3), B(-2;-4),C(4;-3).

Задача 13. Вычислить угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{СД}$, если A(3;1), B(7;3), C(3;2), Д(6;6).

Задача 14. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$+ $\vec{b}$ и $\vec{a}$- $\vec{b}$, если $\vec{a}$(2;3) и $\vec{b}$ =(1;1).

Задача 15. Проверить, перпендикулярны ли векторы

1) $\vec{a}$(-3;5) и $\vec{b}$ =(5;3).

2) $\vec{c}$(2;-4) и $\vec{d}$ =(-4;-2);

3) $\vec{p}$(-3;-4) и $\vec{q}$ =(5;1).

Практическое занятие №21. Составление уравнений прямых

Прямая на плоскости и ее уравнение. Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой и окружности.

Цель: Научить составлять уравнение на плоскости и окружности и строить эти линии.

Уравнение первой степени относительно переменных x и y, т.е. уравнение вида Ax+By+C=0 при условии, что коэффициенты A и B одновременно не равен нуль, называется общим уравнением прямой.

Значение коэффициента	Вид уравнения	Положение прямой
C=0	Ax+By=0 У=kx	Проходит через начало координат
A=0	By+C=0 (y=b)	Параллельно оси Ox
B=0	Ax+ C=0 (x=a)	Параллельно оси Oy
A=C=0	y=0	Совпадает с осью Ox
B=C-0	X=0	Совпадает с осью Oy

Задача 1. Проверить, принадлежат ли точки А (3;14);
В (4,13); С (-3;0); Д(0;4) прямой 7х-3у+27=0.

Задача 2. Построить прямую 3х+4у-12=0.

Задача 3. Построить прямые:
1)х=3; х=-2; х=0;
2) у=4; у=-1; у=0.

Задача 4. Вычислить длину отрезка прямой 3х+4у-24=0 заключенного между осями координат.

Задача 5. На прямой 2х+у-6=0 найти точку М, равноудаленную от точек А (3;5) и В (2;6).

Задача 6. На прямой х-2у-4=0 найти точку М, равноудаленную от точек А (5;1) и В (2; -4).

Задача7. На прямой 3х+4у+20=0 найти точку М, равноудаленную от точек А (-8; -3) и В (-5;-6).

Уравнение прямой в отрезках на осях.

Уравнение прямой в отрезках на осях имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ где a и b сответственно абсцисса и ордината точек пересечения прямой осями Ох и Оу.

Задача 8. Построить прямую $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$.

Задача 9. Построить прямую: 1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$;

2) $\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1$;

3) $-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$;

4) $-\frac{x}{6}-\frac{y}{3}=1.$

Задача 10. Общее уравнение прямой 3x-4y+2=0 преобразовать к уравнению в отрезках на осях.

Задача 11. Преобразуйте уравнение следующих прямых к уравнениям в отрезках на осях:

1) x+y-3=0;

2) 2x+3y+1=0

3) $-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1;$

4) $-\frac{x}{6}-\frac{y}{3}=1.$

Задача 12. Составить уравнение прямой, пересекающей ось Ох в точке (3;0), а ось ординат в точке (0;5).

Задача 13. Составьте уравнение прямой в отрезках на осях, если пересекает оси координат в точках: 1) А (-2;0); В (0;3);
2) А (3;0); В (0; -4).

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид y=kx+b, где k=tgα – угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона прямой к оси Ох, а b- ордината точки пересечения прямой с осью Оу.

Если α=0 то k=0, т.е. прямая параллельна оси Ох.

При α=90° углового коэффициента k не существует, т.е. прямая перпендикулярна оси Ох, не имеет углового коэффициента.

Если на прямой, проходящей через начало координат, взята точка $A(X_A; У_A)$, то k=tg α=$\frac{y_A}{x_A}$

Задача 14. Построить прямые:

1) $y=3x$;
2) $y=x$;
3) $y=\frac{1}{2}x$;
4) $y=-3x$.

Задача 15. Построить прямую $y=2x+8$.

Задача 16. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат, если ее угловой коэффициент:1) $k=5$;
2) $k=-3$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(X_A; У_A)$ в заданном направлении имеет вид $У-У_A= k(X-X_A)$, где $k=tg\alpha$ – угловой коэффициент прямой.

Уравнение $У-У_A= k(X-X_A)$ можно рассматривать как уравнение пучка прямых, т.е. множества прямых проходящих через одну и ту же точку плоскости – точку $A(X_A; У_A)$.

Задача 17. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А (5;-1) и имеющий угловой коэффициент $k=3$.

Задача 18. Составить уравнение прямой:
1)проходящей через точку (-1;1) и имеющий угловой коэффициент $k=2$;
2) проходит через точку (2;0) и $k=-2$.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(X_A; У_A)$ и $B(X_B; У_B)$ имеет вид $У-У_A=\frac{У_B-У_A}{X_B-X_A}(X-X_A)$.

Угловой коэффициент прямой, проходящей через точку А и В, находиться из соотношения $k_{\text{AB}}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

Задача 19. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки А (2; -3) и В (-1;4).

Задача 20. Найти угол наклона и оси Ох прямой, проходящей через точки А (2;3) и В (-3;1).

Задача 21. Составить уравнения прямой, проходящей через точки:

1) А (-1; -1) и В (-2;-2);

2) А (3;0) и В (0;4).

Задача 22. Составьте уравнение сторон треугольника, вершинами которого служат точки:1) А (-3; -2), В (1;5) и С (8; -4);

2) А (-1; -3), В (3;5) и С (4;0).

Практическое занятие №22. Составление уравнений плоскости

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ уравнение плоскости, проходящей через данную точку в заданном направлении. Это уравнение можно переписать как $Ax +By +C z+D=0$, где

$D=-(Ax_0+By_0+C z_0)$

Задача 1. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ох и походящей через точку $M_0(2; -1;3)$ *(под руководством преподавателя)*

Решение: Уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ох, имеет вид $Ax+ D=0$

Подставив в это уравнение координаты точки M_0, находим $D=-2A$. Подставив теперь значение D в уравнение $Ax+ D=0$, получим $Ax-2A=0$, т.е. $x-2=0$

Задача 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ох и точку

М (3;2;4) *(под руководством преподавателя)*

Решение: Уравнение искомой плоскости имеет вид By+Cz=0. Подставим координаты точки М, получим 2В+4С =0, т.е. В=-2С. Подставим теперь значение В в уравнение By+Cz=0, находим -2Cy+Cz=0 т.е. -2y+z=0;

$$2y-z=0$$

Задача3. Составить уравнение плоскости перпендикулярной оси О z и проходящей через точку

M_0 (1; -2; -3).

Задача 4. Составит уравнение плоскости:

1) проходящей через ось О z и точку М (1;1;1);
2) проходящей через ось Оу и точку М (-2; -3; -4)

Уравнение плоскости через определитель

Теорема. Пусть даны координаты трех точек, через которые надо провести плоскость: $M = (x_1, y_1, z_1)$; $N = (x_2, y_2, z_2)$; $K = (x_3, y_3, z_3)$. Тогда уравнение этой плоскости можно записать через определитель:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Задача 5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки:

***A* = (0, 0, 1); *B* = (1, 0, 0); C = (1, 1, 1);** *(под руководством преподавателя)*

Составляем определитель и приравниваем его к нулю:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 0-0 & 0-1 \\ 1-0 & 1-0 & 1-1 \\ x-0 & y-0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z-1 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрываем определитель:

$1\ 1\ (z-1) + 0\ 0\ x + (-1)\ 1\ y - (-1)\ 1\ x - 0\ 1\ (z-1) - 1\ 0\ y = 0$

$z - 1 - y + x = 0$

$x-y+z-1=0$ –уравнение плоскости проходящей через точки $A = (0, 0, 1)$; $B = (1, 0, 0)$; $C = (1, 1, 1)$;

Задача 6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки:

***A* = (0, 0, 0); *B*₁ = (1, 0, 1); *D*₁ = (0, 1, 1);** *(под руководством преподавателя)*

Сразу подставляем координаты точек в определитель:

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 0-0 & 1-0 \\ 0-0 & 1-0 & 1-0 \\ x-0 & y-0 & z-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

Снова раскрываем определитель:

$1\ 1\ z + 0\ 1\ x + 1\ 0\ y - 1\ 1\ x - 0\ 0\ z - 1\ 1\ y = 0$

$z-x-y=0$

$-x-y+z=0$

$x+y-z=0$ – уравнение плоскости проходящей через точки $A = (0, 0, 0)$; $B_1 = (1, 0, 1)$; $D_1 = (0, 1, 1)$;

Задача 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-2;\ -3;1)$ и $M_2(1;4;\ -2)$ и перпендикулярной плоскости $2x+3y-z+4=0$.(*под руководством преподавателя*)

Решение: За нормальный вектор $\overrightarrow{\mathrm{n}}$ искомой плоскости примем векторное произведение векторов $\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$ =(1+2;4+3;-2-1)=(3;7;-3) и $\overrightarrow{\mathrm{n_1}}$ =(2;3;-1)

$\overrightarrow{\mathrm{n}}$= $\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{n_1}}=\begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{k} \\ 3 & 7 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=\vec{\mathrm{i}}\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}-\vec{\mathrm{j}}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=(-7+9)\ \vec{\mathrm{i}}-(-3+6)\ \vec{\mathrm{j}}+(9-14)\ \vec{k}=2\vec{\mathrm{i}}-3\vec{\mathrm{j}}-5\vec{k}$$

Остается воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M_1(-2;-3;1)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n}=(2;-3;-5)$

2(x+2) -3(y+3)-5(z-1) =0 или 2x-3y-5 z=0. Заметим, что при составлении уравнения искомой плоскости вместо M_1 можно было взять точку M_2.

Задача №8. Составить уравнение плоскости:

1) проходящей через точки A (1; -4; -3) и B (4; -2; -1) и перпендикулярной плоскости x-y- 3z+7=0;

2) проходящей через точку $M_1(2; -1; -3)$ и $M_2(-3;4;1)$ и перпендикулярной плоскости x-y- 3z+2=0;

<u>Практическое занятие №23.</u> Составление уравнения сферы

Множество всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии R от данной точки C, называется *сферой радиуса* R *с центром в точке* C (Рис.1)

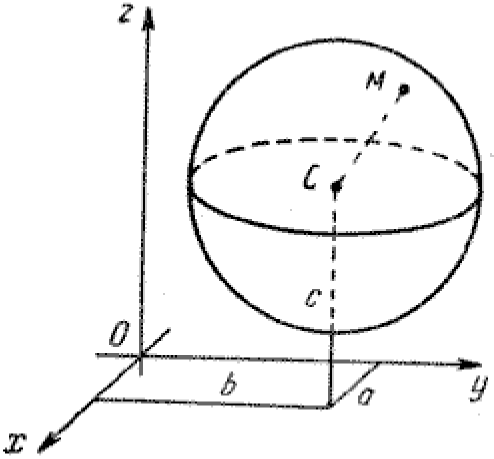


рис.1

Другими словами, сфера радиуса R с центром в точке C — это множество всех точек M пространства, удовлетворяющих условию

|CM| = R. (1)

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется *диаметром* сферы. Очевидно, что длина диаметра сферы радиуса R равна 2R.

Если в пространстве задана некоторая прямоугольная декартова система координат и (*a; b; c*) — координаты точки C, а (*x; y; z*) — координаты точки M, то условие (1) принимает вид

$\sqrt{(x - a)2 + (y - b)2 + (z - c)2} = R.$

Отсюда следует, что сфера радиуса R с центром в точке C (*a; b; c*) имеет уравнение

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ (2)

В частности, сфера радиуса R с центром в начале координат имеет уравнение

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (3)

Задача 1. Составить уравнение сферы радиуса R = 5 с центром в начале координат.

Решение: Непосредственной подстановкой значения радиуса в уравнение (3) получим

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

Задача 2. Написать уравнение сферы с центром в точке С (2; -3; 5) и радиусом, равным 6.

Решение:

Подставив значение координат точки С и значение радиуса в уравнение (2), получим

$$(x — 2)^2 + (y + 3)^2 + (z — 5)^2 = 36.$$

Задача 3. Найти центр и радиус сферы

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 100.$$

Решение: Сравнивая данное уравнение с уравнением сферы (2), видим, что $a = -4$, $b = 3$, $c = 0$, R = 10. Следовательно, С (-4; 3; 0), R = 10.

Задача 4. Доказать, что уравнение

$x^2 + y^2 + z^2 — 2x + 4y — 6z + 5 = 0$ является уравнением сферы.

Решение: Преобразуем левую часть данного уравнения, выделив квадраты двучленов, содержащих соответственно x, y и z:

$$x^2 — 2x + y^2 + 4y + z^2 — 6z + 5 = (x — 1)^2 — 1 + (y + 2)^2 — 4 + (z — 3)^2 — 9 + 5 = (x — 1)^2 + (y + 2)^2 + (z — 3)^2 — 9.$$

Следовательно, данная поверхность имеет уравнение

$$(x — 1)^2 + (y + 2)^2 + (z — 3)^2 = 9.$$

Это уравнение представляет собой уравнение сферы с центром в точке С (1; -2; 3) и радиусом R = 3.

Задача5: напишите уравнение сферы с центром в точке S(1;3;5) радиусом равным 4 см.

Решение: запишем уравнение сферы в общем виде, где X_0, $У_0$ и z_0 – координаты центра сферы $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

Подставим заданные координаты центра сферы в уравнение. Получим, что уравнение данной нам сферы выглядит так: .$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=4^2$

.$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=16$

Ответ. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2$

Задача 6. Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением:

.$(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=4$

Решение: запишем уравнение сферы в общем виде, где $X_0, У_0$ и z_0 – координаты центра сферы.

.$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

Тогда не трудно заметить, что координаты центра сферы будут равны 2, - 1, 0.

С $(x_0;y_0;z_0)$=С(2;-1;0)

А радиус заданной сферы равен $R=\sqrt{4}\ 2$ $R=\sqrt{4}=2$.

Ответ.2

Задача7: Какую поверхность определяет уравнение

$4x^2+4y^2+4z^2-8x+12y-16z+13=0$?

Решение: запишем уравнение сферы в общем виде, где $X_0, У_0$ и z_0 -координаты центра сферы.

.$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

Преобразуем наше уравнение.

$4x^2+4y^2+4z^2-8x+12y-16z+13=0$

Разделим почленно это уравнение на 4.

$x^2+y^2+z^2-2x+3y-4z+\frac{13}{4}=0$

Получим, .

Затем выделим полные квадраты. Получим,

$(x^2-2x+1)+(y^2+2\cdot\frac{3}{2}y+\frac{9}{4})+(z^2-4z+4)-1-\frac{9}{4}-4+\frac{13}{4}$

Преобразуем слагаемые получившегося выражения. Получим, $(x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2+(z-2)^2=4$

Теперь сравним последнее уравнение с уравнением сферы в общем виде. Заметим, что исходное уравнение определяет сферу с центром в точке C(1;-1,5;2) и R=2.

Практические задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Составьте уравнение сферы с центром O (2; 3; 4) и радиусом R=5.

2. Точки A (7; -2; 4) и B (9; -8; 6) лежат на поверхности сферы и на прямой, проходящей через её центр. Составьте уравнение сферы.

Вариант 2

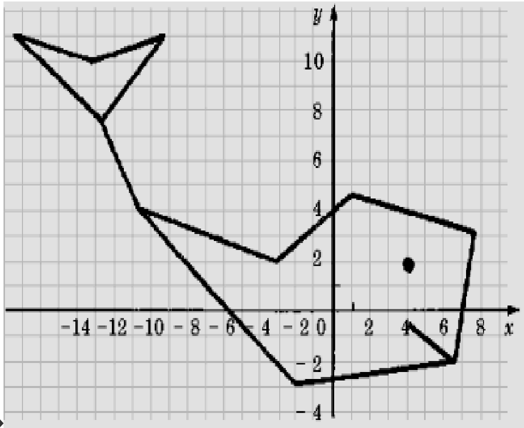
1. Составьте уравнение сферы с центром O (-3; 0; 4) и радиусом R=$\sqrt{2}$.

2. Сфера имеет центр в точке C (2; -1; 3) и проходит через начало координат. Составьте уравнение сферы.

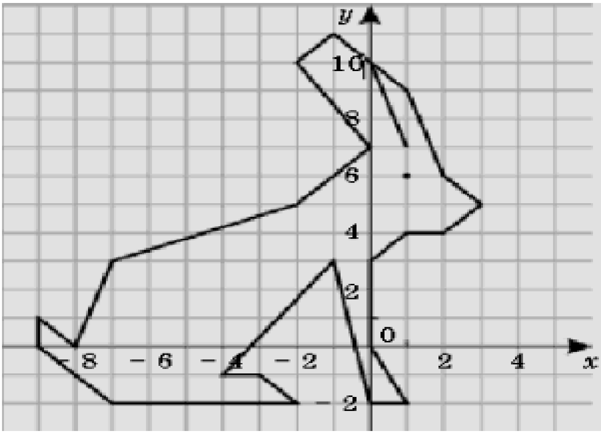
Практическое занятие №24 Выполнение упражнений по разделу «Введение декартовых координат в пространстве»

1. Построить следующие точки на прямоугольной системе координат и соединить их линией:

(4; – 0,5),	**(– 9; 11),**	**(– 3; 2),**
(6,5; – 2),	**(– 13; 10),**	**(1; 4,5),**
(– 2;– 3),	**(– 17; 11),**	**(7,5;3),**
(– 10,5;4),	**(– 12,5; 7,5),**	**(6,5;– 2);**
(– 12,5;7,5),	**(– 10,5; 4),**	**глаз:(4;2).**



«Кит»



«Заяц».

(1; 7)
(0; 10),
(– 1; 11),
(– 2; 10),
(0; 7)

(– 2; 5),
(– 7; 3),
(– 8; 0),
(– 9; 1),
(– 9; 0)

(– 7; – 2),	**(0; – 2),**	**(2; 4),**
(– 2; – 2),	**(1; – 2),**	**(3; 5),**
(– 3; – 1,	**(0; 0),**	**(2; 6),**
(– 4; – 1),	**(0; 3),**	**(1; 9),**
(– 1; 3)	**(1; 4)**	**(0; 10),**

Глаз: (1; 6)

Зачетная работа

Вариант 1	**Вариант 2**
1.Точка С (2;3) делит АВ в отношении 1:4(от А к В). Найдите точку А, если В(-6;-1)	1.Отрезок АВ задан точками А(7;-4) и В(-8;1) и делится точкой С в отношении 1:4 (от А к В). Найдите точку С.
2.Найдите точку М, равноудаленную от осей координат и от данной точки А(4;-2).	2. Отрезок задан точками А(-10; 4) и В(5;-1). До какой точки С нужно его продолжить, чтобы АВ:ВС=5:1?
3.Вычислите угол между векторами $\vec{a}$,=(-3;4) и $\vec{b}$,=(4;3)	3. Вычислите косинус угла между векторами $\vec{a}$,=(3;4) и $\vec{b}$,=(5;12)

<u>Практическое занятие№ 25.</u> Упрощение тригонометрических выражений

Цель: Закрепить умения и навыки упрощения тригонометрических выражений

$1° = \frac{1}{360}$ части длины окружности, 1°=60′,
1′=60″

Отношение длины дуги окружности L к длине ее радиуса R называется радианной

мерой a этой дуги: $a = \frac{L}{R}$

$ɑ=\frac{2\pi}{R}=2\pi$

Формула перехода от градусного измерения к радианному. Пусть дуге в α градусов соответствует дуга, равная a радиан, тогда из пропорции $\frac{180°}{\alpha}=\frac{\pi}{ɑ}$ получим формула перехода от градусного измерения к радианному

$ɑ=\frac{\pi}{180°}\cdot\ \alpha.$

Формула перехода от радианного измерения к градусному. Из формулы $ɑ=\frac{\pi}{180°}\cdot\ \alpha$ выражая дугу или угол α через ɑ получаем формулу перехода от радианного измерения к градусному $\alpha=\frac{\pi}{180°}\cdot ɑ$

Длина дуги окружности. По формуле $a=\frac{L}{R}$ находим L= $a\cdot R$

Длина дуги окружности равна радианной мере дуги, умноженной на радиус этой дуги.

1.Выразите в радианной мере величины углов:

а)30°, 45°, 60°; $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$

б) 90°, 120°, 135°; $(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4})$

в) 150°, 75°, 180°; $(\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{12},\pi)$

г) 210°, 225°,270°; $(\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$

д)300°,360°,7200.° $(\frac{5\pi}{3}, 2\pi, 40\pi)$.

2.Выразите в градусной мере величины углов:

а) $\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{2},\pi$ (60°, −90°, 180°)

б) $-\frac{2\pi}{3}, 4, -3\pi$ (−120°,135°, −540°)

в) $\frac{\pi}{18}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{36}$ (10°,−150°,5°)

3.Упростить выражения

а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha$;

б) $1+\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha + 1)$;

в) $(1 + tg\,\alpha)^2 + (1 - tg\,\alpha)^2$;

г) $\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;

д) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha + \cos^2\alpha$.

4.Вычислить:

а) $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2} + tg\pi - sin\frac{3\pi}{2} - \cos(-\frac{\pi}{2}) + sin\pi$;

б) $sin\frac{\pi}{2} - cos\frac{3\pi}{2} + cos\,\pi - tg0 + \mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{2}$;

в) $2\,sin\frac{\pi}{3} + 2\,cos\frac{\pi}{4} - 3\,tg\,\frac{\pi}{3} + \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{2}$;

г) $\sin^2\frac{\pi}{4} - 2\cos^2\frac{\pi}{3} - 5\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}$;

д) $5+\mathrm{ctg}^4\frac{\pi}{6} - \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}$;

е) $(2a\sin(\frac{\pi}{6}))^3 - (b\,\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4}))^3 - \left(2abcos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2$;

ж) $\sin(-\frac{\pi}{6}) - 2\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos(-\frac{\pi}{3}) - \mathrm{ctg}(-\frac{\pi}{2})$;

з) $\cos^3\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos(-\frac{\pi}{3}) - \cos(-\frac{\pi}{3})$;

и) $\cos^3\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{ctg}^3\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin^3\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

5.Вычислить:

а) $f(\frac{\pi}{6})$; $f(0)$; $f(\frac{\pi}{3})$; $f(\pi)$ для функции $f(x)=4\sin3x+5\cos3x-2\sin x$;

б) $f(\frac{\pi}{6})$ для функции $f(x)= \sin x+ \sin2x+ \sin3x$;

в) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$; где $\alpha =, \ \beta=\frac{\pi}{6}$.

<u>Практическое занятие № 26.</u> Выполнение упражнений на использование основных тригонометрических тождеств

Цели урока:

- уметь находить четверть и знак тригонометрических функций;
- умение переводить радианную меру угла в градусную меру;
- уметь использовать основные формулы тригонометрии при упрощении тригонометрических выражений;
- уметь пользоваться соотношениями между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике;

Основные тригонометрические тождества.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (1)

$\sin x/\cos x = \mathrm{ctg}x$

$1-\sin^2 x = \cos^2 x$ (2)

$\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ct}x = 1$ (3)

$\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x$ (4)

$\sin(-x) = \sin x$

$1 + \mathrm{tg}^2 x = 1 / \sin^2 x$

Примеры. Упростить выражение:

а) $1 - \sin^2\alpha$; б) $\cos^2\alpha - 1$; в) $(1 - \cos\alpha)(1+\cos\alpha)$;
г) $\sin^2\alpha\cos\alpha - \cos\alpha$; д) $\sin^2\alpha+1+\cos^2\alpha$;
е) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$; ж) $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha\mathrm{tg}^2\alpha$;
з) $\mathrm{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha$; и) $\cos^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$.

Решение.

а) $1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ по формуле **1)**;

б) $\cos^2\alpha - 1 =- (1 - \cos^2\alpha) = -\sin^2\alpha$ также применили формулу **1)**;

в) $(1 - \cos\alpha)(1+\cos\alpha) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$. Вначале мы применили формулу разности квадратов двух выражений: $(a - b)(a+b) = a^2 - b^2$, а затем формулу **1)**;

г) $\sin^2\alpha\cos\alpha - \cos\alpha$. Вынесем общий множитель за скобки.

$\sin^2\alpha\cos\alpha - \cos\alpha = \cos\alpha\,(\sin^2\alpha - 1) = -\cos\alpha(1 - \sin^2\alpha) = -\cos\alpha \cdot \cos^2\alpha = -\cos^3\alpha$. Вы, конечно, уже заметили, что так как $1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$, то $\sin^2\alpha - 1 = -\cos^2\alpha$. Точно так же, если $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$, то $\cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$.

д) $\sin^2\alpha+1+\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+1 = 1+1 = 2$;

е) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$. Имеем: квадрат выражения $\sin^2\alpha$ плюс удвоенное произведение $\sin^2\alpha$ на $\cos^2\alpha$ и плюс квадрат второго выражения $\cos^2\alpha$. Применим формулу квадрата суммы двух выражений: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$. Далее применим формулу1). Получим: $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2 = 1^2 = 1$;

ж) $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) = \mathrm{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$. Применили формулу 1), а затем формулу 2).

Запомните: $\mathrm{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\alpha$.

Аналогично, используя формулу 3) можно получить:

$\mathrm{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha = \cos\alpha$. Запомнить!

з) $\mathrm{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha = \mathrm{ctg}^2\alpha(\cos^2\alpha - 1) = \mathrm{ctg}^2\alpha \cdot (-\sin^2\alpha) = -\cos^2\alpha$.

и) $\cos^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\alpha = \cos^2\alpha(1+\mathrm{tg}^2\alpha) = 1$. Мы вначале вынесли общий множитель за скобки, а содержимое скобок упростили по формуле 7.

Преобразовать выражение:

$$\frac{1-tg^2\alpha+tg^4\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Решение. Перепишем выражение в виде:

$$\frac{1-tg^2\alpha+tg^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot(1-tg^2\alpha+tg^4\alpha) = (1+tg^2\alpha)\cdot(1-tg^2\alpha+tg^4\alpha) =$$

$$= 1^3 + (tg^2\alpha)^3 = 1 + tg^6\alpha.$$

Мы применили формулу **7)** и получили произведение суммы двух выражений на неполный квадрат разности этих выражений – формулу суммы кубов двух выражений:

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 – ab + b^2)$. У нас **a** = 1, **b** = $tg^2\alpha$.

Упростить:

$$\left(1 + ctg^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdot 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Решение.

Применим формулу **8)** и получаем: $\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdot 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$. Каждое слагаемое в скобках умножим на $3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Получим:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}\cdot 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 3\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha = 3(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 3\cdot 1 = 3.$$

VI. Домашнее задание.

- Повторить основные тригонометрические тождества и свойства тригонометрических функций.
- Повторить знаки тригонометрических функций в зависимости от принадлежности к четвертям.

<u>Практическое занятие№27.</u> Упрощение

тригонометрических выражений

Упражнения

1. Упростите выражения:

1) $\sin^2 x - 1$; 2) $\cos^2 x + (1 - \sin^2 x)$

3) $\sin^2 x + 2\cos^2 x - 1$; 4) $(1 - \sin x)\cdot(1 + \sin x)$;

5) $(\cos x - 1)\cdot(1 + \cos x)$; 6) $1 - \sin^2 x - \cos^2 x$;

7) $\cos^2 x - (1 - 2\sin^2 x)$; 8) $\sin x \cdot \cos x \cdot tgx$;

9) $\sin x \cdot \cos x \cdot ctgx - 1$; 10) $\sin^2 x - tgx \cdot ctgx$.

2. Преобразуйте выражения:

а) sinx·ctgx; б) cosx·tgx; в). $\frac{sinx}{tgx}$

г). $\frac{tgx}{ctgx}$ +1 д) $\frac{sin^2x-1}{1-cos^2\ x}$

.

3. Упростите выражение:

1) ctgx - $\frac{cosx-1}{sinx}$; 2) $\frac{1}{sinx-1}+\frac{1}{1+sinx}$

.

4. $\boldsymbol{\sin\alpha = -\frac{3}{5}}$. **Вычислите:**

1. Найдите значение $tg\alpha$, если, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
2. Найдите значение $tg\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
3. Найдите значение $ctg\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Самостоятельная работа

В – 1

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = ...$
2. $ctgx = ...$
3. $tg^2 x + 1 = ...$
4. $\sin x \cdot ctgx = ...$
5. $\frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = ...$

В – 2

1. $tgx \cdot ctgx = ...$
2. $tgx = ...$
3. $ctg^2 x + 1 = ...$
4. $tgx \cdot \cos x = ...$

<u>Практическое занятие № 28.</u> Выражение тригонометрических функций через другие.

Цель: Закрепить умения и навыки выражения тригонометрических функций через другие.

Формулы выражения одних тригонометрических функций через другие

	sinα	**cosα**	**tgα**	**ctgα**
sinα	sinα	$\pm\sqrt{1-sin^2\alpha}$	$\frac{\text{sin}\alpha}{\pm\sqrt{1-sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-sin^2\alpha}}{\text{sin}\alpha}$
cosα	$\pm\sqrt{1-cos^2\alpha}$	cosα	$\frac{\pm\sqrt{1-cos^2\alpha}}{\text{cos}\alpha}$	$\frac{\text{cos}\alpha}{\pm\sqrt{1-cos^2\alpha}}$
tgα	$\frac{\text{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{ tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{ tg}^2\alpha}}$	tgα	$\frac{1}{\text{ctg}\alpha}$
ctgα	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	$\frac{\text{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\text{ctg}\alpha}$	ctgα

1.Вычислить:

1) cosα; tgα, ctgα, если sinα = $-\frac{5}{13}$ $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

2)sinα ; tgα, ctgα, если cosα = $-\frac{8}{17}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

3) sinα ; cosα, ctgα, если tgα = $\frac{8}{15}$ $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

4) cosα; sinα; tgα, если ctgα = $-\frac{7}{24}$ $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

<u>Практическое занятие №29</u>. Вычисление значений выражения с помощью формул приведения.

Цель работы: закрепить умения и навыки решения задач по теме: «Формулы приведения»

Таблица формул приведения для тригонометрических функций (sin x, cos x, tg x, ctg x)

Функция / угол в рад.	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sin	cos α	cos α	sin α	– sin α	–cos α	– cos α	– sin α	sin α
cos	sin α	– sin α	–cos α	–cos α	– sin α	sin α	cos α	cos α
tg	ctg α	– ctg α	– tg α	tg α	ctg α	– ctg α	– tg α	tg α
ctg	tgα	– tg α	– ctg α	ctg α	tg α	– tg α	– ctg α	ctg α
Функция / угол °	**90 – α**	**90°+ α**	**180° – α**	**180° + α**	**270– α**	**270° + α**	**360° – α**	**360°+ α**

Пример1. Вычислить:

а) $\sin 150° = sin(90° + 60°)=\cos 60° = \frac{1}{2}$

б) $\mathrm{ctg}\,\frac{2\pi}{3} = ctg(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6})= -\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}= -\frac{\sqrt{3}}{3}$

в) $\cos 150°=\cos(90°+60°)=-\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

г)$\cos150° = \cos(180° - 30°)$=-$\cos30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

д) $\text{tg}120°=\text{tg}\,(90° + 30°)=-\text{ctg}30° = -\sqrt{3}$

е) $\text{tg}120°=\text{tg}\,(180° - 60°)=-\text{tg}60° = -\sqrt{3}$.

ж) $\sin1313°=\sin(360° \cdot 3 + 233°)=\sin\,(180°+53°)=-\sin53°$

2.Вычислить:

1) $\sin 135°$

2) $\cos 240°$

3) $\text{tg}\ 330°$

3.Вычислить:

1) $\sin 9135° + \cos\,(-585°)+\text{tg}1395° + \text{ctg}(-630°)$;

2) $\sin\,(-\frac{13\pi}{6})+\cos\frac{17\pi}{3}+\text{tg}\frac{22\pi}{3}-\text{ctg}\frac{37\pi}{4}$;

3) $\sin\,(-\frac{47\pi}{3}) - \text{tg}\,\frac{21\pi}{4}+\text{tg}(-\frac{23\pi}{4}) -\text{ctg}\,\frac{19\pi}{6}$;

4) $\text{ctg}\ 225° - \text{ctg}\ 675° - \cos495° + \cos765°$;

5) $\sin\,(-810°)+\cos\,(-900°)+\text{tg}\,(-395°)\ \text{ctg}\ 575°$.

<u>Практическое занятие № 30.</u> Нахождение значения выражения с помощью формул сложения

Формулы сложения:

$\sin\,(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$

$\sin\,(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$

$\cos\,(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos\,(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\text{tg}\,(\alpha + \beta) =\frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$; $\beta\neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$,

$\text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta \neq 1$

$\text{tg}\,(\alpha - \beta) =\frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1+ \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$;

$\beta\neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $\text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta \neq 1$

$\text{ctg}\,(\alpha + \beta) =\frac{\text{ctg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\beta + 1}{\text{ctg}\,\beta - \text{ctg}\,\alpha}$ $\alpha \neq \pi k$, $\beta\neq \pi k$, $\alpha \neq -\beta+ \pi k$.

$$\mathbf{ctg}\ (\alpha - \beta) = \frac{\mathbf{ctg}\ \alpha \cdot \mathbf{ctg}\ \beta - 1}{\mathbf{ctg}\ \beta + \mathbf{ctg}\ \alpha} \qquad \alpha \neq \pi k,\ \beta \neq \pi k,\ \alpha \neq -\beta + \pi k$$

Пример 1

Задача: Вычислите точное значение тангенса 15° .

tg15°-?

Решение

Для наглядности мы 15° можно представить в виде разности 45°−30°. В этом случае решение задачи можно получить с помощью формулы тангенса разности. Возьмем формулу, которую мы приводили выше, и укажем в ней имеющиеся нам известные значения: $tg15° = tg(45° - 30°) = \frac{tg45° - tg30}{1 + tg45° \cdot tg30°}$ °

Вычисляем $\frac{tg45° - tg30}{1 + tg45° \cdot tg30°}$ =–

Пример 2

Задача: Выберем формулу сложения для проверки формулы приведения следующего вида: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

Нам подойдет формула синуса суммы. Итого:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2} \cdot \sin\alpha = 1 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \sin\alpha = \cos\alpha$$

Ответ: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ - наша формула доказана.

***Задача*:** Найти ctg(75°).

Решение:

ctg(75°)=ctg(45°+30°)

$$\mathbf{ctg(\alpha+\beta) = \frac{(ctg\alpha ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}}$$

$$\mathbf{ctg(45°+30°) = \frac{ctg(45°)ctg(30°) - 1}{(ctg45° + ctg30°}}$$

ctg(75°)= $\frac{\mathbf{1\cdot\sqrt{3}-1}}{\mathbf{(1+\sqrt{3})}}$

Вычислите 1-2

1. а) $\cos0{,}3\pi\sin0{,}2\pi + \sin0{,}3\pi\cos0{,}2\pi$;

б) $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{5} - sin\frac{\pi}{15}sin\frac{3\pi}{5}$;

в) $\cos35°sin65° - sin35°cos65°$;

б) $\cos79°\cos34° + sin79°sin34°$.

2. $а$) $\frac{tg\frac{\pi}{15}+tg\frac{4\pi}{15}}{1-tg\frac{\pi}{15}tg\frac{4\pi}{15}}$; б) $\frac{tg\frac{2\pi}{3}-tg\frac{5\pi}{12}}{1+tg\frac{2\pi}{3}tg\frac{5\pi}{12}}$;

в) $\frac{tg22°+tg23°}{1-tg22°tg23°}$; г) $\frac{tg72°-tg42°}{1+tg72°tg42°}$.

3. Вычислить cos $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$, если

1) $\sin\alpha = \frac{4}{5},\ cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$;

2) $\sin\alpha = \sin\beta = \frac{5}{13}$, $(0 < \alpha < \pi)$, $\left(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$.

4. Вычислить sin $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$, если

а) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\sin\beta = -\frac{4}{5}$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}\right)$.

б) $\cos\alpha = \cos\beta = -\frac{4}{5}$, $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, $\left(\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}\right)$.

5.Упростить выражение:

а) $\sin\alpha\cos3\alpha - \cos\alpha\sin3\alpha$;

б) $\cos4\alpha\cos\alpha + \sin4\alpha\sin\alpha$;

в) $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{6})$;

г) $\sin(\beta + \frac{\pi}{3}) - \sin(\beta - \frac{\pi}{3})$.

<u>Практическое занятие№31.</u> Формулы двойного аргумента.

Цель: Закрепление умения и навыков вычисления тригонометрических функций удвоенного аргумента

Тригонометрические функции удвоенного аргумента.

$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

$\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

$\mathbf{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$

$\mathbf{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$

$\mathbf{tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}}$

Пример №1. Упростите выражение: $\cos^2\beta - \cos 2\beta$

Решение: в данном выражении встречается формула косинуса двойного угла $\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta$ упростим выражение

$\cos^2\beta - \cos 2\beta = \cos^2\beta - (\cos^2\beta - \sin^2\beta) = \underline{\cos^2\beta} - \underline{\cos^2\beta} + \sin^2\beta = \sin^2\beta$

Упростите следующие выражения самостоятельно:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha$; б) $\cos 2\beta + \sin^2\beta$; в) $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} - \cos\alpha$

Пример №2

Найти значение $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$, α - угол 3-ей четверти.

Решение: сначала вычислим $\sin\alpha$. Так как α – угол 3-ей четверти, то $\sin\alpha<0$. Поэтому

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-(-0{,}8)^2} = -\sqrt{1-0{,}64} = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6$$

По формуле синуса двойного угла имеем: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\beta = 2\cdot(-0{,}6)\cdot(-0{,}8) = 0{,}96$

Самостоятельно найди значение $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}8$, α - угол 3-ей четверти.

Пример №3

Вычислите: а) $2\sin 45^0 \cos 45^0$

Решение: $2\sin 45^0 \cos 45^0 = \sin 2\cdot 45^0 = \sin 90^0 = 1$

б) $4\cos^2 45^0 - 4\sin 45^0$

Решение: $4\cos^2 45^0 - 4\sin 45^0 = 4(\cos^2 45^0 - \sin 45^0) = 4\cos 2\cdot 45^0 = 4\cos 90^0 = 0$

в) $\frac{4tg15^0}{1-tg^2 15^0} = \frac{2\cdot 2tg15^0}{1-tg^2 15^0} = 2tg2\cdot 15^0 = 2tg30^0 = 2\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Вычислите самостоятельно: а) $2\sin 15^0\cos 15^0$; б) $\cos^2 15^0 - \sin 15^0$; в) $\frac{2tg5^0}{1-tg^2 5^0}$

Упражнения.

1.Вычислить: cos 2x, если sin x=- 0,3.

2. Зная, что $\sin x = -\frac{3}{5}$ и $x \in \left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$, вычислить: а)cos2 x, б)sin2 x, в)tg2x.

3. Зная, что $\cos x = \frac{5}{13}$ и $x \in \left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$, вычислить: а)cos2 x, б)sin2 x, в)tg2x.

4. Зная, что $tgx = -\frac{3}{4}$ и $x \in \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$, вычислить: а)cos2 x, б)sin2 x, в)tg2x.

5. Зная, что $ctgx = -\frac{4}{3}$ и $x \in \left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$, вычислить: а)cos2 x, б)sin2 x, в)tg2x.

6. Выразить:

а) $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$;

б) $\sin 4\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$;

г) $ctg 3\alpha$ через $ctg\alpha$;

д) $\sin 5\alpha$ через $\sin\alpha$

Практическое занятие № 32. Выполнение упражнений на использование тригонометрических функций половинного аргумента

Формулы:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}};$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}};$$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{1-cos\alpha}};$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}=\frac{1-cos\alpha}{sin\alpha};$$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1+cos\alpha}{sin\alpha}=\frac{sin\alpha}{1-cos\alpha}.$$

Пример. Известно, что $\cos\alpha=0{,}4, \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$ найдём по формуле: $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-0{,}4}{2}=0{,}3$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{0{,}3}$.

По условию $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. Разделив обе части неравенства на 2, получаем $\frac{3\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\pi$, значит угол $\frac{\alpha}{2}$ во второй четверти, здесь синус положительный. $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{0{,}3}$.

2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; найдём по формуле $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha + 1}{2} = \frac{0{,}4 + 1}{2} = 0{,}75 =$,
$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{0{,}75} = \pm 0{,}5\sqrt{3}$

Мы уже выяснили, что угол $\frac{\alpha}{2}$ во второй четверти, косинус отрицательный. $\cos\frac{\alpha}{2} = -0{,}5\sqrt{3}.$

3) Так как тангенс это отношение синуса на косинус, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{0{,}3}}{-0{,}5\sqrt{3}} = -2\sqrt{0{,}1}.$

$\boldsymbol{tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha + 1}}$ **- формула тангенса половинного аргумента**

Так как котангенс это число, взаимообратное тангенсу, то $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}$ **- формула котангенса половинного аргумента**

Пример. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\cos\alpha = -0{,}6$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

По формуле (3) находим $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha + 1} = \frac{1 + 0.6}{-0{,}6 + 1} = \frac{1{,}6}{0{,}4} = 4$, а $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm 2.$ Найдём положение угла $\frac{\alpha}{2}$.

По условию $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$,(разделим на 2)

$\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, угол $\frac{\alpha}{2}$в первой четверти, тангенс положительный, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$, а $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 0{,}5$.

Выведем формулу, по которой можно найти $\sin\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Для этого используем формулу синуса двойного угла $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, заменив в ней x на $\frac{\alpha}{2}$. Получаем $\sin\alpha = \sin(2\cdot\frac{\alpha}{2}) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1}$, учтём, что $1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$, то

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

разделим числитель и знаменатель на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, получаем:

$$\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}} \quad \textbf{(4)}$$

Выведем формулу для $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Применим формулу косинуса двойного угла, где $\alpha = 2(\frac{\alpha}{2})$,

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}},$$

разделим числитель и знаменатель на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, получаем:

$$\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad (5)$$

Пример. Найти $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$.

По формуле (5) $\cos\alpha = \frac{1-2^2}{1+2^2} = \frac{1-4}{1+4} = -0{,}6$.

Если в формуле тангенса двойного угла $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$ представить $\alpha = 2(\frac{\alpha}{2})$, то получим ещё одну формулу, по которой тангенс угла α можно найти через тангенс угла $\frac{\alpha}{2}$: $\mathbf{tg}\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

С помощью доказанных на этом уроке формул можно не только вычислять значения выражений, но и упрощать выражения, доказывать тождества и решать тригонометрических уравнений.

Пример. Доказать тождество $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Представим $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$, а $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, преобразуем левую часть тождества

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1-\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}},$$ но

$1-\cos^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$, то

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Левая часть равна правой части, тождество доказано.

Упражнения.

1. Вычислить $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2. Вычислить $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ если $\mathrm{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

3. Вычислить $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ если $\mathrm{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{3\pi}{2}. < \alpha < 2\pi$.

Практическое занятие№ 33. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

Цель: Закрепление умений и навыков в преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

Формула	**Название формулы**
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	Сумма синусов
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$	Разность синусов
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	Сумма косинусов
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	Разность косинусов

$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$, $\alpha, \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$	Сумма тангенсов
$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$, $\alpha, \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$	Разность тангенсов

1. Преобразуйте в произведение:
а) sin48◦ + sin32◦; (Ответ: 2sin40◦cos8◦);
б) sin71◦−sin13◦; (Ответ: 2sin29◦cos42◦;)
в) cos π/ 5 + cos 2π/ 5; (Ответ: 2cos3π 10cosπ 10;)
г) cos 3π/ 7 −cos 9π/ 7. (Ответ: 2sin6π/ 7sin3π /7)
2. Упростите выражение:
а) sin83◦−sin23◦; (Ответ: cos53◦; ;)
б) cos35◦ + cos25◦; (Ответ: √3cos5◦)
в) sin π/ 8 + sin 3π /8 ; (Ответ: √2cosπ/ 8;)
г) cos 4π /15 −cos 2π/ 5 . (Ответ: √3sinπ/ 15)

3. Преобразуйте в произведение:
а) sin3α−sin7α; (Ответ: −2sin2αcos5α)
б) cos4α + cos10α; (Ответ: 2cos7αcos3α)
в) cos(π /3 + α)−cosα; (Ответ: −sin(π/6+α))
г) sin(π/ 3 –α)+ sinα. (Ответ: cos(π/ 6−α)

Преоброзовать в произведение
а) cos10+sin(90+10)=cos10+cos10 = 2cos10
4. Преобразуйте в произведение:

а) sin10◦ + cos70◦; (Ответ: 2sin15◦cos5)

б) cos50◦−sin14◦; (Ответ: 2sin13◦cos27)

в) cos40◦ + sin40◦; (Ответ: √2cos5)

г) sin20◦−cos20◦. (Ответ: √2sin25)

5. Докажите тождество:

$$\frac{sin3\alpha+sin\alpha-2sin2\alpha}{cos3\alpha+cos\alpha-2cos2\alpha}=\text{tg}2\alpha$$

$$\frac{sin3\alpha+sin\alpha-2sin2\alpha}{cos3\alpha+cos\alpha-2cos2\alpha}=\frac{2sin\frac{3\alpha+\alpha}{2}cos\frac{3\alpha-\alpha}{2}-2sin2\alpha}{2cos\frac{3\alpha+\alpha}{2}cos\frac{3\alpha-\alpha}{2}-2cos2\alpha}=$$

$$\frac{2sin\frac{4\alpha}{2}cos\frac{2\alpha}{2}-2sin2\alpha}{2cos\frac{4\alpha}{2}cos\frac{2\alpha}{2}-2cos2\alpha}=\frac{2sin2\alpha cos\alpha-2sin2\alpha}{2cos2\alpha cos\alpha-2cos2\alpha}=\frac{sin2\alpha(2cos\alpha-2)}{cos2\alpha(2cos\alpha-2)}=$$

$$\frac{sin2\alpha}{cos2\alpha}=\text{tg}2\alpha$$

а) sinα + sin2α + sin3α + sin4α = 4sin 5α/ 2cosαcosα/ 2;

б) cosα + cos2α + cos3α + cos4α = 4cos 5α/ 2cosαcosα /2;

в) cos2α−cos4α−cos6α + cos8α = −4cos5αsin2αsinα.

6. Докажите тождество:

а) sinα + 2sin3α + sin5α = 4sin3αcos^2 α;

б) sin2 5α−sin2 3α = sin8αsin^{2}α.

<u>Практическое занятие №34.</u> Обратные тригонометрические функции.

Цель: закрепить умения и навыки вычисления обратных тригонометрических функций

Арксинус (y = arcsin *x*) – это функция, обратная к синусу (*x* = sin *y*). Он имеет область определения $-1 \leq x \leq 1$ и множество значений $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Арккосинус (y = arccos *x*) – это функция, обратная к косинусу (x = cos *y*). Он имеет область определения $-1 \leq x \leq 1$ и множество значений $0 \leq y \leq \pi$.

Арктангенс (y = arctg *x*) – это функция, обратная к тангенсу (x = tg *y*). Он имеет область определения $-\infty < x < +\infty$ и множество значений $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Арккотангенс (y = arcctg *x*) – это функция, обратная к котангенсу (*x* = ctg *y*). Он имеет область определения $\infty < x < +\infty$ и множество значений $0 < y < \pi.$

Найдем:

$$а)\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ б)\ \arccos\left(-\frac{1}{2}\right);\ в)\ \operatorname{arctg}\sqrt{3};\ г)\ \operatorname{arcctg}(-1).$$

Учитывая определения обратных тригонометрических функций получим:

$$а)\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3},\ \text{так как}\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{и}\ -\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$б)\ \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3},\ \text{так как}\ \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\ \text{и}\ \frac{2\pi}{3} \in [0; \pi];$$

$$в)\ \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},\ \text{так как}\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\ \text{и}\ \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$г)\ \operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4},\ \text{так как}\ \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1\ \text{и}\ \frac{3\pi}{4} \in (0; \pi).$$

Пример 3

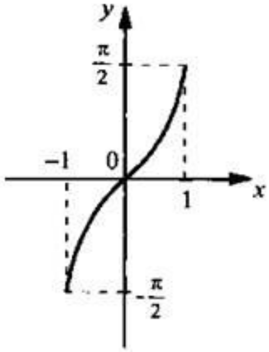
Вычислим $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right).$

Пусть угол a = arcsin 3/5, тогда по определению sin a = 3/5 и $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, надо найти cos a. Используя основное тригонометрическое тождество, получим: $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$ Учтено, что $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и cos a ≥ 0. Итак, $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}.$

Рассмотрим более подробно свойства обратных тригонометрических функций.

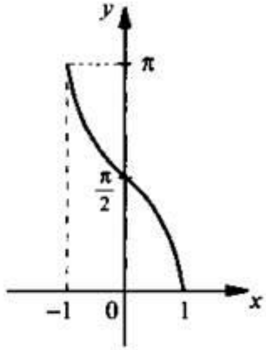
Свойства функции	Функция			
	y = arcsin x	y = arccos x	y = arctg x	y = arcctg x
Область определения	x ∈ [-1; 1]	x ∈ [-1; 1]	x ∈ (-∞; +∞)	x ∈ (-∞ +∞)
Область значений	y ∈ [-π/2; π/2]	y ∈ [0; π]	y ∈ (-π/2; π/2)	y ∈ (0; π)
Четность	Нечетная	Ни четная, ни нечетная	Нечетная	Ни четная, ни нечетная
Нули функции (y =0)	При x = 0	При x = 1	При x = 0	y ≠ 0
Промежутки знакопостоянства	y> 0 при x ∈ (0; 1], y < 0 при x ∈[-1; 0)	y > 0 при x∈ [-1; 1)	y> 0 при x ∈ (0; +∞), y < 0 при x ∈(-∞; 0)	y > 0 при x∈ (-∞; +∞)
Монотонность	Возрастает	Убывает	Возрастает	Убывает
Связь с тригонометрической функцией	sin y = x	cos y = x	tg y = x	ctg y = x
График	а	б	в	г

а



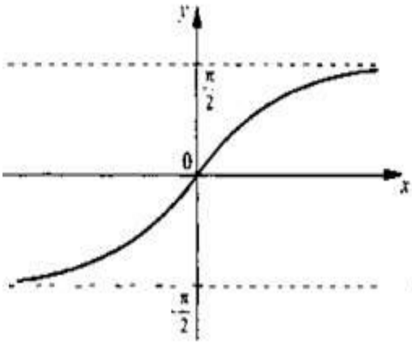
$y = \arcsin x$

б



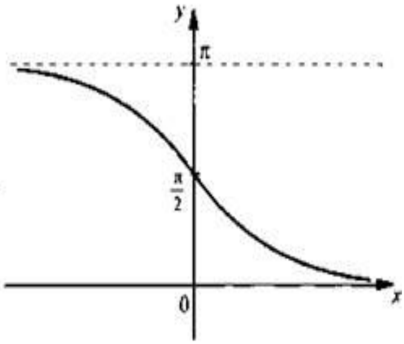
$y = \arccos x$

в



$y = \text{arctg}\, x$

г



$y = \text{arcctg}\, x$

Упражнения.

20.Вычислить:

а) arcsin0; б) arcsin1; в) arcsin(-1); г) $\arcsin\frac{1}{2}$;

д) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; ж) $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

21.Вычислить:

а)arccos0; б) arccos1; в) arccos(-1); г) arcos $\frac{1}{2}$;

д) arccos$(-\frac{1}{2})$; е) arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) arccos$(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

22. Вместо звездочек поставить знак равенства или неравенства, чтобы получить верное соотношение:

а) arcsin $\frac{1}{2}$ · arccos$\frac{\sqrt{3}}{2}$. б) arcsin$(-\ \frac{1}{2})$ · arccos$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

в)arctg1· arccos $\frac{1}{2}$; г) arctg$(-\sqrt{3})$ · arcsin$(-\ \frac{1}{2})$

23. Вычислить:

а) arcsin $\frac{1}{2}$+ arccos $\frac{1}{2}$; б) arcsin$\frac{\sqrt{2}}{2}$ +arccos $(-\frac{\sqrt{2}}{2})$;

в) arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2}$+ arccos$(\ -\frac{\sqrt{2}}{2})$; г) arcsin$(-\frac{\sqrt{3}}{2})$+ arccos$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

24.Вычислить:

а) arctg$\sqrt{3}$+ arctg(-1); б) arctg$\frac{1}{\sqrt{3}}$+arctg1;

в) arctg(-1) + arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) arctg$\sqrt{3}$+ arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) arcsin$(-\frac{\sqrt{3}}{2})$+ arccos$(\ -\frac{\sqrt{2}}{2})$+ arctg$\frac{1}{\sqrt{3}}$.

25.Вычислить:

а) arcsin1+ arccos1+ arctg1+ arcctg1;
б) arcsin0+ arcsin1+ arcsin(-1);
в) arccos0+ arccos1+ arccos(-1);
г) arctg(-1)+ arcctg(-1);
д) arcsin $\frac{1}{2}$ + arccos $\frac{1}{2}$ + arctg0;
е) arcsin$(-\frac{1}{2})$ + arccos$(\ -\frac{\sqrt{2}}{2})$ + arctg0;
ж) arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$+ arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$+ arcctg1;
з) arcsin$(-\frac{\sqrt{3}}{2})$+ arccos$(-\frac{\sqrt{3}}{2})$+ arcctg$\sqrt{3}$.

26.Вычислить:

а) $\sin(\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \operatorname{arctg}\sqrt{3})$;

б) $\operatorname{ctg}(\arccos 1 + 2\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3}))$;

в) $\cos(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{3})$;

г) $\sin^2(\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \arccos\frac{1}{2})$.

Практическое занятие №35. Решение простейших тригонометрических уравнений

Цель: Закрепить умения и навыки решения простейших тригонометрических уравнений

Формулы простейших тригонометрических уравнений.

1) sinx=m

x=$(-1)^k$arcsin m+πk, $k\epsilon Z$.

k,n,m- могут принимать любые целые значения, но при этом ради кратности не будем указывать, что $k\epsilon Z$, $n\epsilon Z$, $m\epsilon Z$.

Если $|m| > 1$, то уравнение не имеет решения.

Частные случаи:

sinx=(-1) **x=$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.**

sinx=0 **x=πk.**

sinx=1 **x=$\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.**

2.cosx=m

x=$\pm$arccos m+2 πk, $k\epsilon Z$.

Если $|m| > 1$, то уравнение не имеет решения.

Частные случаи:

cosx=-1 **x=$\pm\boldsymbol{\pi}+2\boldsymbol{\pi k}$** **или x=$\pm\boldsymbol{\pi}(1+2\boldsymbol{k})$**
cosx=0 **x=$\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}+\boldsymbol{\pi k}$**
cosx=1 **x=$2\boldsymbol{\pi k}$.**

3. tgx=m
x=arctgm+ $\boldsymbol{\pi k}$, $\boldsymbol{k\epsilon Z}$.

4. ctgx=m
x=arcctgm+ $\boldsymbol{\pi k}$, $\boldsymbol{k\epsilon Z}$.

1. Решить уравнение cos2x = 1/2.

Используем метод решения простейших тригонометрических уравнений и получаем:

2x = ±arccos(1/2) + 2πn = ±π/3 + 2πn (здесь и далее, n ∈ Z).

Откуда x = ±π/6 + πn.

Ответ: x = ±π/6 + πn.

2. Решить уравнение sin(3 - 2x) = -1/2.

Используем формулу из методов решений, имеем:

3 - 2x = $(-1)^n$(arcsin(-1/2)) + πn = (-1)n(-π/6) + πn (здесь и далее n ∈ Z).

Делаем преобразование и получаем x = 3/2 + π/12$(-1)^n$ - πn/2.

Ответ: x = 3/2 + π/12$(-1)^n$ - πn/2.

Упражнения.

1.Решите уравнения:

а)sin 2x= $\frac{1}{2}$; б)tg (3x+2)= -1; в)cos (cosx)= $\frac{1}{2}$.

2.Решите уравнения:

а)$sin^2x=m$; б) $cos^2x=m$;
в) $tg^2x=m$; г) $ctg^2x=m$.

3.Решите уравнение:

а) sinx= $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) sinx= $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) sinx= $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) sinx= $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
д) cosx= $\frac{1}{2}$; е) cosx= $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) cosx= $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) cosx= $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
и) tgx= $\sqrt{3}$; к) tgx=1; л) ctgx=1; м) ctgx= $-\sqrt{3}$.

4.Решите уравнение:
а) $sin^2x = \frac{1}{2}$; б) $sin^2x = 1$; в) $cos^2x = 1$;г) $cos^2x = \frac{1}{2}$;
д) $tg^2x = 1$; е) $ctg^2x = 3$; ж) $tg^2x = \frac{1}{3}$.

5.Решите уравнение:
а) cos2x=1; б) tg(x $-\frac{\pi}{2}$)=1; в) tg(2x+ $\frac{\pi}{2}$)=-1.

<u>Практическое занятие № 36</u>. Решение простейших тригонометрических неравенств.

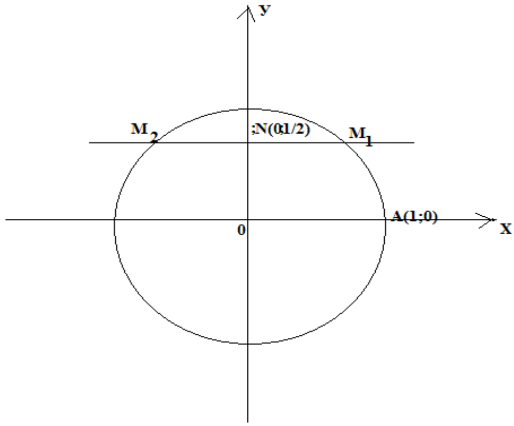
Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида sin x<m, sin x>m, cos x<m, cos x>m, tg x<m, tg x>m, ctg x<m, ctgx>m, где m- данное число.

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента (дуг или углов), которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

Пример 1. Решить неравенства: а) sinx< $\frac{1}{2}$, б) sinx> $\frac{1}{2}$

Решение: а) Учитывая свойство ограниченности синуса, данное неравенство можно переписать так:

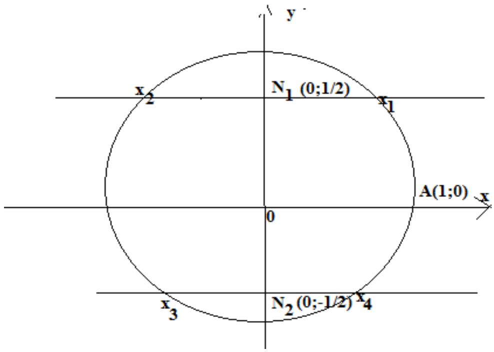
-1≤ $sinx < \frac{1}{2}$. Имеем $\widetilde{AM_1} = \frac{\pi}{6}$, $\widetilde{AM_2} = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$



Неравенству sin x< $\frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка $-\frac{7\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$. В силу периолдичности синуса общим

решением служит множество дуг вида $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k.$

1) Это неравенство выполняется для всех дуг $x_1 < x < x_2$ и $x_3 < x < x_4$, где $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\pi$



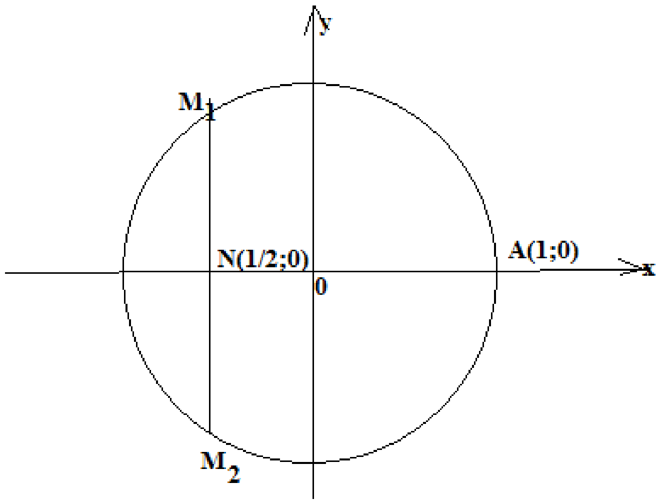
$X_3 = x_1 + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi$ и $X_4 = x_2 + \pi = \frac{5\pi}{6} + \pi$, т.е. для $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ и

$\frac{\pi}{6}+\pi < x < \frac{5\pi}{6}+\pi$. Общим решением служит множество дуг $\frac{\pi}{6}+\pi k < x < \frac{5\pi}{6}+\pi k$..

Пример2.Решить неравенство. а) cosx>$-\frac{1}{2}$, б) tg x $> \sqrt{3}$, в) ctg x > 1

Решение: а) Перепишем данное уравнение так: $-\frac{1}{2}$ <cosx $\leq -\frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка

$$-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$$



Общим решением служит множество дуг вида $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k < x < \frac{2\pi}{3}+2\pi k$.

б) tg x $> \sqrt{3}$.

Учитывая свойство неограниченности тангенса, имеем $\sqrt{3} < tgx < +\infty$. Неравенству tg x $> \sqrt{3}$ удовлетворяют дуги промежутка $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$. В силу периодичности тангенса общим решением служит множество дуг вида $\frac{\pi}{3}+\pi k<\ x<\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Упражнения

Решите неравенства:

32. а) $\sin x<\frac{\sqrt{3}}{2}$; б)$\sin x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$; г)$\sin x\ \geq 0{,}055$.

33. а) $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$; б)$\cos x\leq\frac{1}{2}$

в) $\cos x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x\ \geq 0{,}7900$.

34. а) $\mathrm{tg}\, x<\sqrt{3}$; б)$\mathrm{tg} x\geq\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\mathrm{tg}\ x<-\sqrt{3}$; г) $\mathrm{tg} x\ >10$

35. а) $\mathrm{ctg}\, x>-\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\mathrm{ctg} x\geq 1$;

в) $\mathrm{ctg}\, x\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\mathrm{ctg} x<-5$.

36. а) $\sin 2x>\frac{1}{2}$; б) $\cos\frac{3x}{4}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\mathrm{tg}\,(-\frac{x}{2})<1$; г) $\cos 2x\ \geq-\frac{1}{2}$..

Практическое занятие №37. Выполнение упражнений по разделу «Основы тригонометрии»

Цель: сформировать и закрепить навыки по преобразованию тригонометрических выражений и способствовать актуализации полученных знаний по теме; способствовать развитию умений ситуацию; развивать математический стиль мышления, формирование устойчивого интереса к предмету

Выбрать правильный ответ:

Задание 1.

1. Упростить выражение: $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$.

а) -1; б) $\cos2 \alpha$; в) 1; г) $\sin2 \alpha$.

2. Упростить выражение: $\frac{1}{\cos^2 a}\ tg^2 a$

а) 1; б) $\sin2 \alpha$; в) -1; г) $\cos2 \alpha$.

3. Упростить выражение: $\frac{cos^2 a}{1 - sin^2 a}$

а) $ctg2 \alpha$; б) 0; в) $tg2 \alpha$; г) 1.

4. Упростить выражение: $tg\ \alpha \cos \alpha$.

а) $\sin \alpha$; б) $\cos \alpha$; в) $\frac{1}{cosa}$ г) $\frac{1}{sina}$

5. Упростить выражение: $1 - \cos2 \alpha + \sin2 \alpha$.

а) $2 \sin2 \alpha$; б) 2; в) $2 \cos2 \alpha$; г) 0.

6. Упростить выражение: $\cos4 \alpha + \sin2 \alpha \cos2 \alpha$.

а) $\sin2 \alpha$; б) $\cos2 \alpha$; в) 1; г) $1 + \cos2 \alpha$.

7. Найдите значение выражения: $\lg(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

а) 10; б) 100; в) 0; г) 1.

8. Найдите значение выражения: $\sin^2 (arctg\ 1/2) + \cos^2 (arctg\ 1/2)$.

а) $1/2$; б) 1; в) $1/4$; г) 2.

9. Упростить выражение: $\frac{1+tgx}{1+ctgx}$

а) $ctg\ \alpha$; б) $-tg\ \alpha$; в) $tg\ \alpha$; г) $-ctg\ \alpha$.

10. Упростить выражение: $\frac{sina}{1+cosa} + \frac{1+cosa}{sina}$

а) $\frac{2}{\cos\alpha}$; б) $\frac{2}{\sin\alpha}$;
в) $\frac{1}{\cos\alpha}$; г) $\frac{1}{\sin\alpha}$.

11. Найдите значение sin α, если cos α = 0,8 $\frac{3\pi}{2} < \alpha <$ **2π**

а) –0,6; б) 0,8; в) –0,8; г) 0,6.

12. Упростить выражение: $(1 + ctg\ \beta)^2 + (1 – ctg\ \beta)^2$.

а) $\frac{2}{\cos^2\beta}$; б) $\frac{1}{\sin^2\beta}$;
в) $\frac{1}{\cos^2\beta}$; г) $\frac{2}{\sin^2\beta}$.

Задание 2.

1. Найдите значение выражения: $\sin^2(43^o) + \cos^2(43^o)$.
а) 1; б) sin α; в) 0; г) cos α.

2. Найти, cos α, если sin α = 5/13 и π/2 <α < π.
а) $\frac{12}{13}$; б)) $-\frac{11}{13}$; в)) $\frac{11}{13}$; г))- $\frac{12}{13}$

3. Найти, tg α, если sin α = 5/13 и π/2 <α <π.
а)) $\frac{5}{13}$; б)) $\frac{-5}{12}$; в) ; г) $-\frac{5}{13}$

4, Найти, ctg α, если sin α = 5/13 и π/2 < α < π.
а) $\frac{-11}{5}$; б) $\frac{12}{5}$; в) $-\frac{12}{5}$; г) $\frac{11}{5}$

5.Найдите значение выражения: $\frac{(2+2sinx)(1-sinx)}{(1+cosx)(2-2cosx)}$, **если ctg x = 2.**

а) 5; б) 4; в) 6; г) 3.

6. Упростить: $\cos^4 \alpha \, (1 + \mathrm{tg}^2 \alpha) + \sin^2 \alpha$.

а) 1; б) $\sin \alpha$; в) 0; г) $\cos \alpha$.

7. Найдите, $\sin x$, если $\mathrm{tg}\, x = 5/12$ и $\pi < x < 3\pi/2$.

а) 5/13; б) –5/12; в) 5/12; г) –5/13.

8. Найти, $\cos x$, если $\mathrm{tg}\, x = 5/12$ и $\pi < x < 3\pi/2$.

а) 12/13; б) –12/13; в) 5/13; г) –5/13.

9. Упростить выражение:

$$\frac{\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}.$$

а) $\mathrm{ctg}6\, \alpha$; б) $\mathrm{tg}8\, \alpha$; в) $\mathrm{ctg}8\, \alpha$; г) $\mathrm{tg}6\, \alpha$.

10. Упростить выражение: $\mathrm{tg}\, \alpha \cos \alpha$.

а) $\mathrm{ctg}\, \alpha$; б) $\sin \alpha$; в) $\mathrm{tg}\, \alpha$; г) $\cos \alpha$.

11. Упростить выражение: $\mathrm{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

а) $\cos2\, \alpha$; б) $\mathrm{tg}2\, \alpha$; в) $\mathrm{ctg}2\, \alpha$; г) $\sin2\, \alpha$.

12. Упростить выражение: $\mathrm{ctg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$

а) $\cos^2 \alpha$; б) $\mathrm{tg}^2 \alpha$; в) $\mathrm{ctg}2\, \alpha$; г) $\sin^2 \alpha$.

Задание 3.

1. Упростить выражение: $(1 - \cos^2 x)\, \mathrm{tg}^2 x$.

а) $\dfrac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$; б) $\dfrac{\sin^4 x}{\cos^4 x}$;

в) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$; г) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$.

2. Упростить выражение:$(1 + \mathrm{tg}^2 x) \cos^2 x$.

а) 9; б) $\sin x$; в) 1; г) $\cos x$.

3. Найти, cos x, если sin x = 0,8 и π/2 <x <π.

а) –0,6; б) 0,8; в) –0,8; г) 0,6.

6. Упростить выражение:

$$\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right)\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

а) ctg α; б) 0; в) tg α; г) 1.

7. Упростить выражение:

$$\left(\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{1-\sin\alpha\cos\alpha} - \cos\alpha\right)\operatorname{ctg}\alpha.$$

а) sin α; б) ctg α; в) cos α; г) cos α.

<u>Известно</u>, что π <α <3π/2 и cos α = – 1/4. Найдите значение остальных тригонометрических функций угла α.

8. **Найдите sin α.**

а)$\frac{1}{\sqrt{15}}$; б) $\sqrt{15}$; в)- $\sqrt{15\,;}$ г) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$.

9. Найдите tg α.

а) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$; б) $\sqrt{15}$; в)- $\sqrt{15}$ г) $\frac{1}{\sqrt{15}}$

10. Найдите ctg α.

а) $\frac{1}{\sqrt{15}}$ б)$-\sqrt{15}$; в)$-\sqrt{15}$; г) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

Основная литература

1.Башмаков, М.И. Математика [Электронный ресурс]: учебник / Башмаков М.И. - Москва:КноРус, 2019. - 394 с. - ЭБС «BOOK.RU» - Режим доступа: https://book.ru/book/929528

2.Дадаян, А.А. Математика [Электронный ресурс]: учебник / А.А. Дадаян. - М.: Форум, 2018. - 544 с. - ЭБС «Znanium.com» - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/967862

Дополнительная литература

3.Башмаков, М.И. Математика: учебник / М.И. Башмаков. – М.: Академия, 2015. – 256 с

4.Башмаков, М.И. Математика. Задачник: учебное пособие / М.И. Башмаков. – М.: Академия, 2014. – 416 с.

1. Богомолов, Н. В. Математика [Электронный ресурс]: учебник / Н. В. Богомолов,

П. И. Самойленко. - Москва: Юрайт, 2019. - 401 с. - ЭБС «Юрайт» - Режим доступа: https://www.biblio-online.ru/bcode/433286

2. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике. Ч. 1 [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н. В. Богомолов. - Москва: Юрайт, 2019. - 326 с. - ЭБС «Юрайт» -

Режим доступа: https://www.biblio-online.ru/bcode/434366