МИНОБРНАУКИ РОССИИ
политехнический колледж филиала федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Майкопский государственный технологический университет» в п. Яблоновском

Методические рекомендации по выполнению практических работ по дисциплине ПД.01 Математика

Раздел: Тригонометрические функции.

форма обучения- очная

Яблоновский, 2017

УДК 51 (07)
ББК 22.1
Ш.26

Авторы: Р.Я. Шартан – преподаватель колледжа филиала МГТУ в п. Яблоновском

Одобрено на заседании цикловой комиссии информационных и математических дисциплин

Протокол № 1 от «31» августа 2017

Методические указания по выполнению практических работ составлены в помощь студентам. Дисциплина «Математика» входит в обязательную часть математического и общего естественно - научного цикла, изучается специальностями 38.02.02 Страховое дело (по отраслям),38.02.07 Банковское дело, 43.02.15 Поварское и кондитерское дело, 09.02.03 Программирование в компьютерных системах.

Основная задача обучения математике – обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества для изучения смежных дисциплин.

Программой предусмотрено дальнейшее вооружение студентов математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения специальных дисциплин, разработки курсовых и дипломных проектов, для профессиональной деятельности и продолжения образования.

Задачами данного курса являются:

- усвоение основ математических знаний (теорем, определений, формул);
- формирование умений, навыков студентов на основе полученных знаний;
- развитие интереса студентов к предмету и стимулирование их познавательной активности.

Основными идеями, проходящими весь курс,
являются:

- приобретение ряда общих умений необходимых для успешного усвоения математики;
- использование математических знаний при изучении общетехнических и специальных дисциплин, в курсовом и дипломном проектировании.

Особое значение для развития математического мышления студентов имеют практические упражнения, во время которых студент должен уметь:

- проводить сложные и несложные дедуктивные рассуждения;
- обосновывать с разумной степенью полноты решения задач и

письменно оформлять их;

- формулировать на математическом языке несложные задачи прикладного характера и интерпретировать полученные результаты;
- пользоваться электронно- вычислительной техникой при решении математических задач;
- пользоваться справочной литературой.

Радианное измерение дуги и угла. Обобщение понятия дуги (угла.)

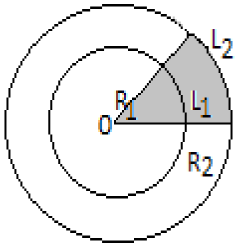
1. **Радианное измерение дуги и угла**

Известна градусная мера измерения углов и дуг: $1° = \frac{1}{360}$ части длины окружности,

$1°=60'$, $1'=60''$

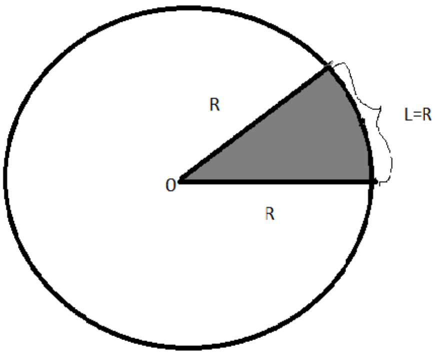
В дальнейшем будем применять еще одну единицу измерения дуг и углов - **радиан.**

Длины дуг L_1 и L_2 двух концентрических окружностей, соответствующих одному и тому же центральному углу, пропорциональны их радиусам R_1 и R_2.



$\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}$, при одном и том же центральном угле отношение длины дуги окружности к ее радиусу не зависит от длины радиуса.

Отношение длины дуги окружности L к длине ее радиуса R называется радианной мерой a этой дуги: $a = \frac{L}{R}$.



При радиане измерении дуг за единицу измерения принимается центральный угол, опирающийся на дугу в один радиан. Такой угол также называется **радианом.**

Из $\boldsymbol{a}$= $\frac{L}{R}$ ⇨ **ɑ**= $\frac{2\pi}{R}$ =$\mathbf{2\pi}$.

2.Формула перехода от градусного измерения к радианному. Пусть дуге в α градусов соответствует дуга, равная a радиан, тогда из пропорции $\frac{180°}{\alpha}$=$\frac{\pi}{ɑ}$ получим формула перехода от градусного измерения к радианному

ɑ=$\frac{\pi}{180°}\cdot\ \alpha$.

Пример: Найти радианную меру дуги, равной 210°.

Решение. По формуле ɑ=$\frac{\pi}{180°}\cdot\ \alpha$, получаем ɑ=$\frac{\pi}{180°}\cdot\ 210°$= $\frac{7\pi}{6}$

1.Выразите в радианной мере величины углов:

а)30°, 45°, 60°; ($\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$)

б) 90°, 120°, 135°; ($\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$)

в) 150°, 75°, 180°; ($\frac{5\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{12}$, π)

г) 210°, 225°,270°; ($\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$)

д)300°,360°,7200.° ($\frac{5\pi}{3}$, 2π, 40π).

3.Формула перехода от радианного измерения к градусному. Из формулы ɑ= $\frac{\pi}{180°}\cdot\ \alpha$ выражая дугу или угол α через ɑ получаем формулу перехода от радианного измерения к градусному $\alpha = \frac{\pi}{180°} \cdot$ α

Пример: Найти градусную меру угла, равного $\frac{7\pi}{4}$

Решение. По формуле $\alpha = \frac{\pi}{180°} \cdot$ α получим $\alpha = \frac{\pi}{180°} \cdot \frac{7\pi}{4}$=315°

2.Выразите в градусной мере величины углов:

а) $\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \pi$ (60°, −90°, 180°)

б) $-\frac{2\pi}{3}, 4, -3\pi$ (−120°,135°, −540°)

в) $\frac{\pi}{18}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{36}$ (10°,−150°,5°)

4.Длина дуги окружности. По формуле $a = \frac{L}{R}$ находим L= $a \cdot R$

Длина дуги окружности равна радианной мере дуги, умноженной на радиус этой дуги.

Пример: Колесо радиуса R=0,35 м повернулась на угол $\alpha = 72°36'$.Найти длину пути, пройденного точкой на ободе колеса.

Решение. Так как значение радиуса колеса дано с двумя значащими цифрами, по таблице Брадиса находим радианную меру $72°36'$, равную 1,27, с тремя значащими цифрами.

L= α· R=0,35 ·1,27$\approx 0{,}443 \approx 0{,}44$(м).

5. Площадь углового сектора. Если центральный угол измеряется градусной мерой, то площадь сектора определяется выражением: $S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360°} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot \frac{180°}{\pi} \alpha = \frac{1}{2} R^2 \alpha$.

Пример. Вычислить площадь сектора круга радиуса 0,76м, если радианная мера дуги сектора равна 1,12рад.

Решение. По формуле $S_{\text{сект}} = \frac{1}{2} R^2 \alpha$, находим

$S_{\text{сект}} = \frac{1{,}12}{2} \cdot 0{,}76^2 \approx 0{,}56 \cdot 0{,}578 \approx 0{,}324 \approx 0{,}32(\text{м}^2)$

6.Линейная скорость при вращении движения. Скорость любой точки твердого тела во вращательном движении называется

линейной скоростью.

Линейная скорость v при равномерном движении точки по окружности радиуса R выражается формулой v=$\frac{2\pi R}{T}$, где T- период вращения, т.е. время (в с), за которое совершается полный оборот точки.

Зависимость линейной скорости v от радиуса R и числа оборотов n, совершаемых точкой в 1 с, выражается формулой v=2πRn.

Число оборотов n и период вращения T связаны соотношением T=$\frac{1}{n}$.

Пример. Найти период вращения точки колеса, находящейся на расстоянии 0,61м от центра и вращающейся равномерно с линейной скоростью v=5, 8 м/с.

Решение. Из v= $\frac{2\pi R}{T}$ следует T=$\frac{2\pi \mathrm{R}}{v}$ = $\frac{2\pi\cdot 0{,}61}{5{,}8}$ =0,65(с).

7.Угловая скорость при вращательном движении. Угол, на который поворачивается радиус любой точки равномерно вращающегося твердого тела за 1с, называется **угловой скоростью.** Угловая скорость выражается в рад/с.

Угловая скорость ω и период вращения T связаны формулой $\omega = \frac{2\pi}{T}$ рад/с.

Через число оборотов в секунду n угловая скорость ω выражается как $\omega = 2\pi n$.

Линейная скорость v точки, находящийся на расстоянии R от оси вращения, и ее угловая скорость ω связаны соотношением v= ωR.

Пример. Найти угловую скорость и период вращения равномерно вращающегося вала, делающего 540 оборотов в минуту.

*Решение.*Число оборотов в секунду составляеи n=540/60=9. Подставляя это значение в $\omega = 2\pi n$=$2\pi \cdot 9 = 18\pi$ рад./с

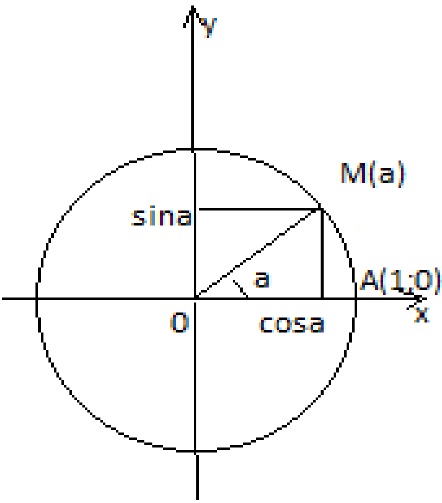
По T=$\frac{1}{n}$= $\frac{1}{18}$ = $\frac{1}{9}$(с).

Пример. Найти угловую скорость равномерно вращающегося колеса с радиусом 0,81м, если линейная скорость точки на его окружности равна 324 м/с.

Решение. По формуле v= ωR получаем $\omega = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{R}} =$

$\frac{324}{0,81}$=400(рад/с)

Тригонометрические функции числового аргумента. Знаки, числовые значения и свойства четности и нечетности тригонометрических функций.



Каждому действительному числу соответствует единственная точка М(α) на числовой единичной окружности , и каждая точка М(α) этой окружности однозначно определена ее абсциссой и ординатой, т.е. абсцисса и ордината являются функциями числа α: x=f(α), y=g(α), причем абсцисса и ордината по абсолютной величине не превышают единицы ($|x| \leq 1, |y| \leq 1$).

Абсцисса x точки M(α) числовой единичной окружности называется косинусом числа α: **cos α=x**

Ордината y точки M(α) числовой единичной окружности называется синусом числа α: **sin α=y.**

Отношение синусом числа α к его косинусу называется *тангенсом числа α*

$$\boldsymbol{tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}.$$

Отношение косинуса числа α к его синусу называется котангенсом числа α

$$\mathrm{c}\boldsymbol{tg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}$$

Знаки тригонометрических функций по четвертям.

	$\mathbf{0} < \alpha < \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ **1 четверть**	$\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} < \alpha < \boldsymbol{\pi}$ **2 четверть**	$\boldsymbol{\pi} < \alpha < \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ **3 четверть**	$\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} < \alpha < \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ **4 четверть**
$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}$	+	+	-	-
$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}$	+	-	-	+
tg $\boldsymbol{\alpha}$	+	-	+	-
ctg α	+	-	+	-

Четность и нечестность тригонометрических функций.

sin (-α)=-sinα

$cos\ \ (-\alpha) = cos\alpha$

tg $(-\alpha)$= $-$tg α

ctg $(-\alpha)$ = $-$ctg α

Основные тригонометрические тождества.

Если две тригонометрические функции одних и тех же аргументов имеют одну и ту же область определения и принимают равные значения при всех действительных значениях аргументов, то они называются **тождественно равными**. Равенство, справедливое при всех допустимых значениях аргументов, называется **тождеством.**

$\mathbf{sin}^{\mathbf{2}}\mathrm{x} + \mathbf{cos}^{\mathbf{2}}\mathrm{x}$**=1 - основное тригонометрическое тождество.**

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$

Зависимость между $\boldsymbol{tg\ \alpha}$ и ctg $\boldsymbol{\alpha}$.

По определению $tg\ \alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ и ctg $\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$ перемножив эти выражения, получим: $\boldsymbol{tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, \ k \in Z}$.

Из этой формулы следует

$$\boldsymbol{tg\ \alpha = \frac{1}{ctg\ \alpha}; \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, \ k \in Z.}$$

$$\boldsymbol{ctg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}; \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, \ k \in Z.}$$

Зависимость между $\boldsymbol{tg\ \alpha}$ и cos$\boldsymbol{\alpha}$.

Разделив обе части уравнения основного тригонометрического тождества

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$ получим:

$$\boldsymbol{1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \ \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \ k \in Z.}$$

Зависимость между ctg $\boldsymbol{\alpha}$ и sin$\boldsymbol{\alpha}$.

Разделив обе части уравнения основного тригонометрического тождества

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\sin^2\alpha$ получим:

$$\boldsymbol{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \ \ \alpha \neq \pi k, \ \ k \in Z.}$$

Доказательство тригонометрических тождеств.

При доказательстве тригонометрических тождеств возможно использование следующих приемов: преобразование обеих частей тождества к одному и тому же выражению; преобразование левой части к правой; преобразование правой части к левой; доказательство обстоятельства, что разность между правой и левой частями равна нулю.

Пример: Доказать тождество $\frac{1-\cos\ \alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha.}{1+\cos\ \alpha}$

1способ: (по пропорции) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin\alpha\ \sin\alpha.$

$$1-\cos^2\alpha\ \text{-}=\ \sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha=\ \sin^2\alpha.$$

2 способ: (умножаем и числитель и знаменатель первой дроби на (1+ $\cos\alpha$))

$$\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{1-\ \cos\ ^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{(1+\cos\alpha}\quad \text{ч.т.д}$$

Упражнения

1.Упростить выражения

а) $\sin^2\alpha+\ \ \cos\ ^2\alpha+\ \text{tg}\ ^2\alpha;$

б) $1+\text{tg}\ ^2\alpha-\ \text{tg}\ ^2\alpha(\cos\ \ ^2\alpha+1);$

в) $(1+\ tg\ \alpha)^2+(1-\ tg\ \alpha)^2;$

г) $\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2;$

д) $\sin^4\alpha+\ \sin^2\alpha\ \ \cos\ ^2\alpha+\cos\ \ ^2\alpha.$

Вычислить: $\mathbf{tg\ ^2\frac{\pi}{3}+ctg\frac{\pi}{6}-2sin\frac{\pi}{3}+\mathit{sin\pi}+4\mathit{cos}\frac{3\pi}{2}-2cos\frac{\pi}{3}}$ **;**

Решение: $\text{tg}\ ^2\frac{\pi}{3}+\text{ctg}\frac{\pi}{6}-2\sin\frac{\pi}{3}+sin\pi+4cos\frac{3\pi}{2}-2\cos\frac{\pi}{3}=$ $(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}-2\frac{\sqrt{3}}{2}+0+4\cdot 0=3+\sqrt{3}-\sqrt{3}-2\cdot\frac{1}{2}=3-2=0.$

Упражнения.

2.Вычислить:

а) $\text{ctg}\frac{\pi}{2}+tg\pi-sin\frac{3\pi}{2}-\cos(-\frac{\pi}{2})+sin\pi;$

б) $sin\frac{\pi}{2}-cos\frac{3\pi}{2}+cos\ \pi-tg0+\text{ctg}\ \frac{3\pi}{2};$

в) $2\ sin\frac{\pi}{3}+2\ cos\frac{\pi}{4}-3\ tg\ \frac{\pi}{3}+\text{ctg}\ \frac{\pi}{2};$

г) $\sin\ ^2\frac{\pi}{4}-2\cos\ ^2\frac{\pi}{3}-5\ \text{tg}\ ^2\frac{\pi}{4};$

д) $5+\text{ctg}\ ^4\frac{\pi}{6}-\text{tg}\ ^2\frac{\pi}{4};$

е) $(2a\sin(\frac{\pi}{6}))^3-(b\,\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4}))^3-\left(2ab\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2$;

ж) $\sin(-\frac{\pi}{6})\ -2\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\ \cos(-\frac{\pi}{3})-\ \mathrm{ctg}(-\frac{\pi}{2})$;

з) $\cos^3\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\ \cos(-\frac{\pi}{3})-\ \cos(-\frac{\pi}{3})$;

и) $\cos^3\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\mathrm{ctg}^3\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin^3\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

2.Вычислить:

а) $f(\frac{\pi}{6})$; $f(0)$; $f(\frac{\pi}{3})$; $f(\pi)$ для функции $f(x)=4\sin3x+5\cos3x-2\sin x$;

б) $f(\frac{\pi}{6})$ для функции $f(x)=\sin x+\sin2x+\sin3x$;

в) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$; где $\alpha=,\ \beta=\frac{\pi}{6}$.

Выражение тригонометрических функций через другие тригонометрические функции.

1.Выражение тригонометрических функций через синус:

Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$\mathbf{\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

$\pm$ ставится в зависимости от того, какой четверти принадлежит аргумент α.

$$\mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathbf{\sin\alpha}}{\pm\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{\sin^2\alpha}}}\qquad \boldsymbol{\alpha\neq\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in Z}.$$

$$\mathbf{ctg}\boldsymbol{\alpha}=\frac{\pm\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{\sin^2\alpha}}}{\mathbf{\sin\alpha}}\qquad \boldsymbol{\alpha\neq\pi k,\ \ k\in Z}.$$

Пример1: **Вычислить** **значение** $\mathbf{\cos\alpha}$; $\mathbf{tg\alpha}$; $\mathbf{ctg\alpha}$, если $\mathbf{\sin\alpha}=-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$ $\boldsymbol{\pi}<\alpha<\frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{2}}$.

$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ т.к. $\alpha\in 3$ четверти, то

$\cos\alpha = -\sqrt{1-sin^2\alpha} \quad = -\sqrt{1-sin^2\alpha} \quad = \quad -\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2}$

$=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$

$\text{tg}\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\mathbf{\frac{4}{5}} \cdot \left(-\mathbf{\frac{5}{3}}\right) = \mathbf{\frac{4}{3}}$

$\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}.$

2.Выражение тригонометрических функций через косинус:

Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\mathbf{\sin\alpha = \pm\sqrt{1-cos^2\alpha}}$ -

$\pm$ ставится в зависимости от того, какой четверти принадлежит аргумент α.

$\mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha} = \frac{\pm\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{cos^2\alpha}}}{\mathbf{cos\alpha}} \qquad \boldsymbol{\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z}$

$\mathbf{ctg}\boldsymbol{\alpha} = \frac{\pm\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{sin^2\alpha}}}{\mathbf{sin\alpha}} \qquad \boldsymbol{\alpha \neq \pi k,\ \ k \in Z}.$

Пример 2: Вычислить значение $\mathbf{sin\alpha}$; $\mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathbf{ctg}\boldsymbol{\alpha}$, если $\mathbf{cos\alpha = -\frac{4}{5}}$,

$\boldsymbol{\pi} < \alpha < \mathbf{\frac{3\pi}{2}}$.

Решение: $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-cos^2\alpha}$

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-cos^2\alpha} = -\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$

$\text{tg}\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\mathbf{\frac{3}{5}} \cdot \left(-\mathbf{\frac{5}{4}}\right) = \mathbf{\frac{3}{4}}$

$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$

3. Выражение тригонометрических функций через тангенс:

Из тождества 1+ tg $^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in Z$

$\mathbf{\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+ tg^2\alpha}}} \qquad \boldsymbol{\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in Z}$

$\mathbf{\sin\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\pm\sqrt{\mathbf{1+ tg^2}\boldsymbol{\alpha}}} \qquad \boldsymbol{\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in Z}$

По формуле tgα · ctgα=1, получаем

$\mathbf{ctg}\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha}} \qquad \boldsymbol{\alpha \neq \frac{\pi}{2}k, \ \ k \in Z.}$

Пример 3. Вычислить значение $\mathbf{\sin\alpha}$; $\mathbf{cos}\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathbf{ctg}\boldsymbol{\alpha}$, если
$\mathbf{tg\alpha = -\sqrt{3}}$**,**
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \boldsymbol{\pi}$ **- 2** четверть

Решение:

$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+ tg^2\alpha}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+ \mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\pm\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}} = -\frac{1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$

4. Выражение тригонометрических функций через котангенс:

Из тождества $1+ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$, $\alpha \neq \pi k, \ \ k \in Z$ получим

$\mathbf{\sin\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\pm\sqrt{\mathbf{1+}\boldsymbol{ctg^2\alpha}}}, \quad \boldsymbol{\alpha \neq \pi k, \ \ k \in Z}$

$$\mathbf{cos\alpha} = \frac{\mathbf{ctg}\boldsymbol{\alpha}}{\pm\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{ctg^2\alpha}}}, \quad \boldsymbol{\alpha \neq \pi k}, \quad \boldsymbol{k \in Z}$$

$$\mathbf{tg\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ctg}\boldsymbol{\alpha}}, \quad \boldsymbol{\alpha \neq \frac{\pi}{2} k}, \quad \boldsymbol{k \in Z}.$$

Пример 4.. Вычислить значение sinα; $\boldsymbol{cos\alpha}$ и $\boldsymbol{tg\alpha}$, если $\mathbf{ctg\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\boldsymbol{\pi} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Выражения одних тригонометрических функций через другие

	sinα	**cosα**	**tgα**	**ctgα**
sinα	sinα	$\pm\sqrt{1-sin^2\alpha}$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$
cosα	$\pm\sqrt{1-cos^2\alpha}$	cosα	$\frac{\pm\sqrt{1-cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-cos^2\alpha}}$
tgα	$\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$	tgα	$\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$
ctgα	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	$\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$	ctgα

3.Вычислить:

1) cosα; tgα, ctgα, если sinα = - $\frac{5}{13}$ $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

2)sinα ; tgα, ctgα, если cosα = - $\frac{8}{17}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

3) sinα ; cosα, ctgα, если tgα = $\frac{8}{15}$ $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

4) cosα; sinα; tgα, если ctgα = - $\frac{7}{24}$ $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Периодичность тригонометрических функций.

Функция f(α) называется периодической, если существует положительное число $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$, называемое периодом такое, что равенство f(α $\pm\, \lambda$) = f(α) удовлетворяется при любом допустимом значении аргумента α.

Свойство периодичности тригонометрических функций при $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z}$ выражается тождествами:

$$\mathbf{cos\alpha = cos(\alpha + 2\pi\boldsymbol{k}),}$$
$$\mathbf{sin\alpha = sin(\alpha + 2\pi\boldsymbol{k}),}$$
$$\mathbf{tg\alpha = tg\alpha(\alpha + \boldsymbol{\pi}),}$$
$$\mathbf{ctg\alpha = ctg\alpha(\alpha + \boldsymbol{\pi k}).}$$

Пример1. Вычислить 2cos (4,5 $\boldsymbol{\pi}$) + $\boldsymbol{sin}(\frac{\mathbf{19\pi}}{\mathbf{3}})$:

Решение:

2cos(4,5 π) + sin($\frac{19\pi}{3}$)=2cos(2 $\pi \cdot 2 + 0{,}5\pi$)+sin(2 $\pi \cdot 3 + \frac{\pi}{3}$)=2cos0,5 π + $+ sin\frac{\pi}{3} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример2.Найти период функции:

1) y=cos $\frac{x}{2}$.

Решение: Обозначим искомый период λ

cos$\frac{x+\lambda}{2}$= cos $\frac{x}{2}$

cos $(\frac{x}{2}+\frac{\lambda}{2})$= cos $\frac{x}{2}$

$\frac{\lambda}{2}=2\,\pi$

λ=4 π.

2) y=sin2x+cos3x

sin2(x+ λ_1)=sin2x

$2\,\lambda_1=2\,\pi$

$\lambda_1=\pi$

cos3(x+ λ_2)=cos3x

$3\,\lambda_2=2\pi$

λ_2=$\frac{2\pi}{3}$.

Каждое число, кратное периоду, само является периодом, поэтому общее кратное чисел λ_1иλ_2 является периодом функции y. Наименьшее общее кратное число π и $\frac{2\pi}{3}$, равное наименьшему общему кратному числителей периодов λ_1иλ_2 составляет 2 π.

3) y=sin$\frac{3x}{2}$+sin$\frac{2x}{3}$

Имеем sin$(\frac{3x}{2}+\frac{3\lambda_1}{2})$=sin$\frac{2x}{3}$

$\frac{3\lambda_1}{2}=\frac{2x}{3}$

$\lambda_1=\frac{4x}{3}$

sin$\frac{2(x+\lambda_2)}{3}$= sin$\frac{2x}{3}$

$\frac{2\lambda_2}{3}=2\pi$

λ_2=3π

Наименьшее общее кратное числителей периодов λ_1иλ_2 равно 12π, следовательно,

период функции y равен 12π.

Формулы приведения.

Формулы приведения позволяют привести тригонометрические функции $\frac{\pi k}{2}+\alpha, k \in Z$ к тригонометрическим функциям угла α.

Формулы приведения для тригонометрических функций.

В таблице приведены формулы приведения для тригонометрических функций
(sin x, cos x, tg x, ctg x)

Функция/ угол в рад.	**π/2 – α**	**π/2 + α**	**π – α**	**π + α**	**3π/2 – α**	**3π/2 + α**	**2π – α**	**2π + α**
sin	cos α	cos α	sin α	– sin α	– cos α	– cos α	– sin α	sin α
cos	sin α	– sin α	– cos α	– cos α	– sin α	sin α	cos α	cos α
tg	ctg α	– ctg α	– tg α	tg α	ctg α	– ctg α	– tg α	tg α
ctg	tg α	– tg α	– ctg α	ctg α	tg α	– tg α	– ctg α	ctg α
Функция / угол в °	**90° – α**	**90° + α**	**180° – α**	**180° + α**	**270° – α**	**270° + α**	**360° – α**	**360° + α**

Пример1. Вычислить:

а) $\sin 150° = sin(90° + 60°)=\cos 60° = \frac{1}{2}$

б) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = ctg(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

в) $\cos 150°=\cos(90°+60°)=-\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

г) $\cos 150° = cos(180° - 30°)=-\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

д) tg120°=tg (90° + 30°)=$-$ctg30° $= -\sqrt{3}$
е) tg120°=tg (180° $-$ 60°)=$-$tg60° $= -\sqrt{3}$.

4.Вычислить:
1) sin 135°
2) cos 240°
3) tg 330°

5.Вычислить:
1) sin 9135° $+ \,cos\,(-585°)$+tg1395° $+ \,ctg(-630°)$;
2) sin $(-\frac{13\pi}{6})$+cos$\frac{17\pi}{3}$ +tg$\frac{22\pi}{3}$ $-$ctg$\frac{37\pi}{4}$;
3) sin $(-\frac{47\pi}{3}) -$ tg $\frac{21\pi}{4}$+tg$(-\frac{23\pi}{4})$ $-$ctg $\frac{19\pi}{6}$;
4) ctg 225° $- \,ctg\ 675° - cos495° + cos765°$;
5) sin ($-$810°)+cos ($-$900°)+tg ($-$395°) ctg 575°

Тригонометрические функции алгебраической суммы двух аргументов (формулы сложения).

Формулы сложения называются формулы, выражающие тригонометрические функции углов $(\alpha \pm \beta)$ через одноименные функции углов α и β.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta} \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1);\ \beta \neq \frac{\pi}{2}(2k+1),\ \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta \neq 1$$
$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta} \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1);\ \beta \neq \frac{\pi}{2}(2k+1),\ \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta \neq 1$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta + 1}{\mathrm{ctg}\,\beta - \mathrm{ctg}\,\alpha} \qquad \alpha \neq \pi k,\ \beta \neq \pi k,\ \alpha \neq -\beta + \pi k.$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta - 1}{\mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\alpha} \qquad \alpha \neq \pi k,\ \beta \neq \pi k,\ \alpha \neq -\beta + \pi k$$

Пример: Найти: sin 15°

Решение:

1) **sin15°=** $\sin(45° - 30°) = \sin45°\cos30° - \cos45°\sin30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1).$

2)cos15$= \cos(45° - 30°) = \cos45°\cos30° + \sin45°\sin30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1).$

3) $\mathbf{f_1 = sin70°cos40° - cos70°sin40°} = \sin(70° - 30) = \sin30° = \frac{1}{2}$

4) $\mathbf{f_2}$**=cos** $\boldsymbol{(\alpha + \beta)}$**,** **если** $\mathbf{cos\alpha = \frac{3}{5}},\ \boldsymbol{cos\beta = \frac{4}{5}}$ $, \boldsymbol{\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)}$, $\boldsymbol{\beta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)}$

Решение:

$f_2 = \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos\alpha\beta = \mathbf{\frac{3}{5}}$ $\quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2}\alpha = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

$cos\beta = \frac{4}{5}$ $\quad \sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2}\beta = -\sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$

$\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot (-\frac{3}{5}) = \frac{12}{25} + \frac{12}{25} = \frac{24}{25}$

Вычислите 6-7

6. а) $\cos0,3\pi\sin0,2\pi + \sin0,3\pi\cos0,2\pi$;

б) $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{5} - sin\frac{\pi}{15}sin\frac{3\pi}{5}$;

в) $\cos35° sin65° - sin35° cos65°$;

б) $\cos79°\cos34° + sin79° sin34°$.

7. $а)$ $\frac{tg\frac{\pi}{15} + tg\frac{4\pi}{15}}{1 - tg\frac{\pi}{15}tg\frac{4\pi}{15}}$; б) $\frac{tg\frac{2\pi}{3} - tg\frac{5\pi}{12}}{1 + tg\frac{2\pi}{3}tg\frac{5\pi}{12}}$;

в) $\frac{tg22° + tg23°}{1 - tg22° tg23°}$; г) $\frac{tg72° - tg42°}{1 + tg72° tg42°}$.

8. Вычислить cos $(\alpha + \beta)$, если

1) $\sin\alpha = \frac{4}{5},\ cos\beta = -\frac{3}{5}\ ,\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right),\quad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right);$

2) $\sin\alpha = \sin\beta = \frac{5}{13},\quad (0 < \alpha < \pi),\quad \left(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right).$

9. Вычислить sin $(\alpha + \beta)$, если

а) $\cos\alpha = \frac{12}{13}\ ,\sin\beta = -\frac{4}{5},\quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right),\quad \left(\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}\right).$

б) $\cos\alpha = \cos\beta = -\frac{4}{5},\quad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right),\quad \left(\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}\right).$

10.Упростить выражение:

а) $\sin\alpha\cos3\alpha - \cos\alpha\sin3\alpha;$
б)$\cos4\alpha\cos\alpha + \sin4\alpha\sin\alpha;$
в)$\cos(\alpha + \frac{\pi}{6})$+ $\cos(\alpha - \frac{\pi}{6});$
г)$\sin(\beta + \frac{\pi}{3}) - \sin(\beta - \frac{\pi}{3}).$

Тригонометрические функции удвоенного аргумента.

sin2 α =2sin α cos α
cos2 α =$cos^2\alpha - sin^2\alpha$
cos2 α =$2cos^2\alpha - 1$
cos2 α =$1 - 2sin^2\alpha$
tg2$\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

Пример1. Доказать тождество:
а)1+ sin2 $\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$
б) 1- sin2 $\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$

Решение: Воспользовавшись тем, что 1=$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$, и формуой синуса двойного аргумента получим

$1+\sin 2\alpha = cos^2\alpha + sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2.$

$1-\sin 2\alpha = cos^2\alpha + sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)^2.$

Пример 2. Сократить дробь: $\frac{\mathbf{1+\sin 2\alpha}}{\mathbf{\cos 2\alpha}}$**.**

Решение: $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{cos^2\alpha - sin^2\alpha} =$

$= \frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$**.**

Пример3. Вычислить: а) $\boldsymbol{cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8}}$**; б)** $\boldsymbol{\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}}$**.**

Решение: а) ***Заданное*** выражение представляет собой правую часть формулы косинуса двойного аргумента**.**

$\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{2\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

б) Заданное выражение представляет собой правую часть формулы синуса двойного аргумента, но только не хватает множителя 2. Введя его, получим:

$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 0{,}5(2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}) = 0{,}5\sin(2\cdot\frac{\pi}{12}) = 0{,}5\sin\frac{\pi}{6} =$

$= 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}25.$

Пример 4. Зная, что cos x=$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$ **и x**$\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$**, вычислить: а)cos2** x**, б)sin2** x**, в) tg2**x.

Решение: *а)* cos2x $= cos^2x - sin^2x$, вычислив

$sin^2x = 1 - cos^2x = 1 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$

$\cos 2x = cos^2x - sin^2x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}.$

б)sin2 x=2sin xcosx.

Значение cos x дано по условии, а значение sin x находим из $sin^2x = \frac{16}{25}$

x$=\frac{4}{5}$; x$=-\frac{4}{5}$. Так как по условии аргумент принадлежит четвертой четверти, а в ней синус отрицателен.Это значит x$=-\frac{4}{5}$

sin2 x =2sin xcosx=2$\cdot$ $\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot$ $\frac{3}{5}$ = - $\frac{24}{25}$.

в) $\mathrm{tg}2\mathrm{x} = \frac{\sin 2\,\mathrm{x}}{\cos 2\,\mathrm{x}} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$.

Упражнения.

11.Вычислить: cos 2x, если sin x=- 0,3.

12. Зная, что sin x = $-\frac{3}{5}$ и x$\in \left(\pi < \mathrm{x} < \frac{3\pi}{2}\right)$, вычислить: а)cos2 x, б)sin2 x, в)tg2x.

13. Зная, что cosx= $\frac{5}{13}$ и x$\in \left(\frac{3\pi}{2} < \mathrm{x} < 2\pi\right)$, вычислить: а)cos2 x, б)sin2 x, в)tg2x.

14. Зная, что tgx =$-\frac{3}{4}$ и x$\in \left(\frac{\pi}{2} < \mathrm{x} < \pi\right)$, вычислить: а)cos2 x, б)sin2 x, в)tg2x.

15. Зная, что ctgx = $-\frac{4}{3}$ и x$\in \left(\frac{3\pi}{2} < \mathrm{x} < 2\pi\right)$, вычислить: а)cos2 x, б)sin2 x, в)tg2x.

16. Выразить:

а) cos3α через cosα;

б) sin4α через sinα и cosα;

в) cos4α через sinα и cosα;

г) ctg3α через ctgα;

д) sin5α через sinα

Тригонометрические функции половинного аргумента.

$\mathbf{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}};$

$\mathbf{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}};$

$\mathbf{tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}};$

$\mathbf{ctg}\,\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{1-cos\alpha}}$;

$\mathbf{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\ \frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}=\frac{1-cos\alpha}{sin\alpha}$;

$\mathbf{ctg}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{1+cos\alpha}{sin\alpha}=\frac{sin\alpha}{1-cos\alpha}$.

Пример: Вычислить $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ **если** $\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Решение: **Знак + или – выбирается в зависимости от четверти.**

$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{1}=\sqrt{3}.$

Упражнения.

17. Вычислить $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ если $\sin\alpha=\frac{4}{5},\quad \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

18. Вычислить $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ если $\mathrm{tg}\alpha=2\sqrt{2},\ \pi<\alpha<\ \frac{3\pi}{2}$.

19. Вычислить $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ если $\mathrm{ctg}\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3\pi}{2}.<\alpha<\ 2\pi$.

Обратные тригонометрические функции.

Опр. ***Арксинусом числа а называется такое число из отрезка*** $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$***, что его синус равна а.***

Пример1.Найти arcsin$\frac{\sqrt{2}}{2}$**.**

Решение: $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, т.к. $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\pi \epsilon \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Опр. ***Арккосинусом числа а называется такое число из отрезка*** $\left[\mathbf{0}; \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$***, что его косинус равен а.***

Пример2.Найти arccos $\frac{\sqrt{3}}{2}$**.**

Решение: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, т. к. $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\pi \epsilon \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Опр. ***Арктангенсом числа а называется такое число из интервала*** $\left(-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}; \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$,

что его тангенс равен а.

Пример 3. Найти arctg1.

Решение: arctg1= $\frac{\pi}{4}$, т.к. $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \epsilon \left(-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}; \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$.

Опр. ***Арккотангенсом числа а называется такое число а из интервала*** $\left(\mathbf{0}; \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$***, что его котангенс равен а.***

Пример4. Найти arcctg $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$**.**

Решение: $\mathrm{arcctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$, т.к. $\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{\pi}{3} \epsilon \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Упражнения.

20.Вычислить:

а) arcsin0; б) arcsin1; в) arcsin(-1); г) $\arcsin\frac{1}{2}$;

д) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; ж) $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

21.Вычислить:

а)arccos0; б) arccos1; в) arccos(-1); г) $\mathrm{arcos}\,\frac{1}{2}$;

д) $\arccos(-\frac{1}{2})$; е) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

22. Вместо звездочек поставить знак равенства или неравенства, чтобы получить верное соотношение:

а) $\arcsin\frac{1}{2} \cdot \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$. б) $\arcsin(-\frac{1}{2}) \cdot \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

в) $\operatorname{arctg}1 \cdot \arccos\frac{1}{2}$; г) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) \cdot \arcsin(-\frac{1}{2})$/

23. Вычислить:

а) $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$;

в) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$; г) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

24.Вычислить:

а) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}(-1)$; б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}1$;

в) $\operatorname{arctg}(-1) + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$.

25.Вычислить:

а) $\arcsin1 + \arccos1 + \operatorname{arctg}1 + \operatorname{arcctg}1$;
б) $\arcsin0 + \arcsin1 + \arcsin(-1)$;
в) $\arccos0 + \arccos1 + \arccos(-1)$;
г) $\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arcctg}(-1)$;
д) $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}0$;
е) $\arcsin(-\frac{1}{2}) + \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \operatorname{arctg}0$;
ж) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arcctg}1$;
з) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \operatorname{arcctg}\sqrt{3}$.

26.Вычислить:

а) $\sin(\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \operatorname{arctg}\sqrt{3})$;

б) $\operatorname{ctg}(\arccos 1+2\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3}))$;

в) $\cos(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{3})$;

г) $\sin^2(\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\arccos\frac{1}{2})$.

Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.

Простейшими тригонометрическими уравнениями называется уравнения sinx=m, cosx=m, tgx=m,ctgx=m, где m- данное число.

Решить простейшие тригонометрические уравнения - значит найти множество всех значений аргумента (дуг или углов), при которых данная тригонометрическая функция принимает заданное значение.

1) sinx=m

$x=(-1)^k\arcsin m+\pi k,\ k\epsilon Z$.

k,n,m- могут принимать любые целые значения, но при этом ради кратности не будем указывать, что $k\epsilon Z$, $n\epsilon Z$, $m\epsilon Z$.

Если $|m|>1$, то уравнение не имеет решения.

Частные случаи:

sinx=(−1) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

sinx=0 $x=\pi k$.

sinx=1 $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

Пример 1:Решить уравнение sinx = $\frac{1}{2}$.

Решение: $\sin x=\frac{1}{2}$.

$x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{2}+\pi k,\ k\epsilon Z$.

$x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\epsilon Z$.

2.cosx=m

x=$\pm$arccos m+2 $\boldsymbol{\pi k, k\epsilon Z}$.

Если $|m| > 1,$ то уравнение не имеет решения.

Частные случаи:

cosx=-1 x=$\boldsymbol{\pm\pi + 2\pi k}$ или x=$\boldsymbol{\pm\pi(1+2k)}$

cosx=0   x= $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + \pi k}$

cosx=1   x=$\boldsymbol{2\pi k}$.

Пример 2. cosx=- $\frac{1}{2}$

Решение:

cosx=- $\frac{1}{2}$

x=$\pm$arccos(**-** $\frac{1}{2}$)+2 πk, $k\epsilon Z$,

x=$\pm$ $\frac{2\pi}{3}$+2 πk,$k\epsilon Z$.

3. tgx=m

x=arctgm+ $\boldsymbol{\pi k, k\epsilon Z}$.

Частный случай:

tgx=0   x= πk, $k\epsilon Z$.

Пример 3. tgx= $\sqrt{3}$

Решение:

tgx=$\sqrt{3}$

x= arctg$\sqrt{3}$+ πk, $k\epsilon Z$.

x=$\frac{\pi}{3}$+πk.

4. ctgx=m

x=arcctgm+ $\boldsymbol{\pi k, k\epsilon Z}$.

Частный случай

ctgx=0   x= $\frac{\pi}{2}$+πk.

Пример 4.

ctgx=-1

x=arctg(-1)+ πk

x=$\frac{3\pi}{4}$+ πk, $k\epsilon Z$.

Упражнения.

27.Решите уравнения:

а)sin 2x= $\frac{1}{2}$;   б)tg (3x+2)= -1;   в)cos (cosx)= $\frac{1}{2}$.

28.Решите уравнения:

а)$sin^2x = m$;   б) $cos^2x = m$;

в) $tg^2x = m$;   г) $ctg^2x = m$.

29.Решите уравнение:

а) sinx= $\frac{\sqrt{2}}{2}$;   б) sinx=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$;   в) sinx=$-\frac{\sqrt{3}}{2}$;   г) sinx= $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) cosx= $\frac{1}{2}$;   е) cosx= $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;   ж) cosx=$-\frac{\sqrt{3}}{2}$;   з) cosx=$\frac{\sqrt{3}}{2}$;

и) tgx=$\sqrt{3}$;   к) tgx=1;   л) ctgx=1;   м) ctgx=$-\sqrt{3}$.

30.Решите уравнение:

а)$sin^2x = \frac{1}{2}$;   б) $sin^2x = 1$;   в) $cos^2x = 1$;г) $cos^2x = \frac{1}{2}$;

д) $tg^2x = 1$;   е) $ctg^2x = 3$;   ж) $tg^2x = \frac{1}{3}$.

31.Решите уравнение:

а) cos2x=1;   б) tg(x$-\frac{\pi}{2}$)=1;   в) tg(2x+$\frac{\pi}{2}$)=-1.

Тригонометрические неравенства.

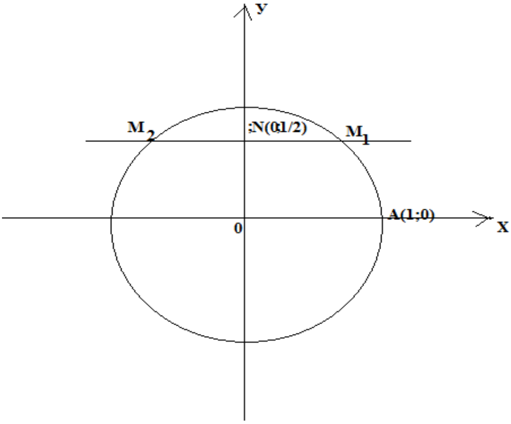
Простейшими тригонометрическим неравенствами называются неравенства вида sinx<m, sinx>m, cosx<m, cosx>m, tgx<m, tgx>m,ctgx<m,ctgx>m, где m- данное число.

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента (дуг или углов), которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

Пример 1. Решить неравенства: а) sinx$< \frac{1}{2}$, б) sinx$> \frac{1}{2}$

Решение: а) Учитывая свойство ограниченности синуса, данное неравенство можно переписать так:

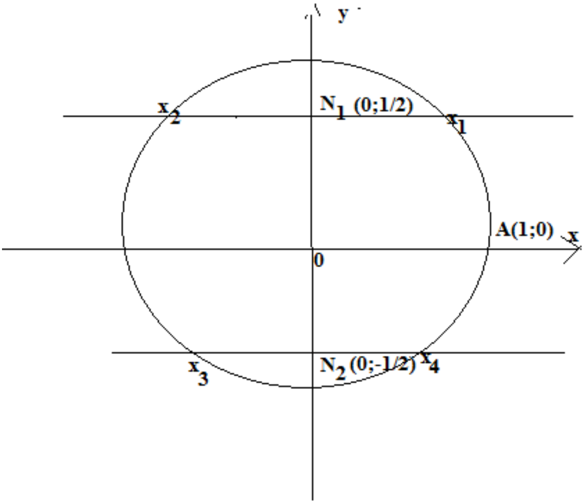
-1$\leq sinx < \frac{1}{2}$. Имеем $\widetilde{AM_1}$ =$\frac{\pi}{6}$, $\widetilde{AM_2}$ =$-\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{7\pi}{6}$



Неравенству sinx$< \frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка $-\frac{7\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$. В силу периолдичности синуса общим

решением служит множество дуг вида $-\frac{7\pi}{6}+2\pi k < x < \frac{\pi}{6}+2\pi k$.

2) Это неравенство выполняется для всех дуг $x_1 < x < x_2$ и $x_3 < x < x_4$, где $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}\pi$



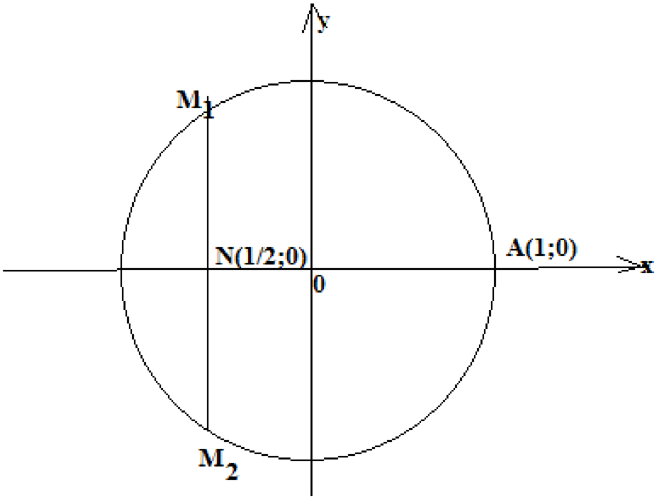
$X_3 = x_1 + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi$ и $X_4 = x_2 + \pi = \frac{5\pi}{6} + \pi$, т.е. для $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6} + \pi < x < \frac{5\pi}{6} + \pi$. Общим решением служит множество дуг $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k$.

.

Пример 2. Решить неравенство. а) $\cos x > -\frac{1}{2}$, б) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$, в) $\operatorname{ctg} x > 1$

Решение: а) Перепишем данное уравнение так: $-\frac{1}{2} < \cos x \leq -\frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка

$$-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$$



Общим решением служит множество дуг вида $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k < x < \frac{2\pi}{3}+2\pi k$.

б) tgx $> \sqrt{3}$.

Учитывая свойство неограниченности тангенса, имеем $\sqrt{3} < tgx < +\infty$. Неравенству tgx $> \sqrt{3}$ удовлетворяют дуги промежутка $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$. В силу периодичности тангенса общим решением служит множество дуг вида $\frac{\pi}{3}+\pi k < x < \frac{\pi}{2}+\pi k$.

Упражнения

Решите неравенства:

32. а) sinx$< \frac{\sqrt{3}}{2}$; б)sin$x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) sinx$< -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г)sinx $\geq 0{,}055$.

33. а) cosx$> \frac{\sqrt{2}}{2}$; б)cosx$\leq \frac{1}{2}$

в) cosx$> -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) cosx $\geq 0{,}7900$.

34. а) $\text{tgx} < \sqrt{3}$; б)$\text{tgx} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\text{tgx x} < -\sqrt{3}$; г) $\text{tgx x} > 10$

35. а) $\text{ctgx} > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\text{ctgx} \geq 1$;

в) $\text{ctgx x} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\text{ctgx} < -5$.

36. а) $\sin 2x > \frac{1}{2}$; б) $\cos\frac{3x}{4} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\text{tgx}\ (-\frac{x}{2}) < 1$; г) $\cos 2x \geq -\frac{1}{2}$..

Решение тригонометрических уравнений и систем. (Основные методы решения уравнений)

Пример 1. Решить уравнение:

а) $\boldsymbol{2sin^2}\text{x} - \boldsymbol{5sin}\text{x} + \mathbf{2} = \mathbf{0}$,

б)$\mathbf{cos^2x - sin^2x}$ **−cosx=0.**

Решение:

а) $2sin^2\text{x} - 5sin\text{x} + 2 = 0$, Введем новую переменную $Z = sin\text{x}$. Тогда уравнение примет вид $2z^2 - 5z + 2 = 0$, откуда находим: $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$.

значит, $\sin x = 2$ и $\sin x = \frac{1}{2}$.

$\sin x = 2$ не имеет корней.

$\sin x = \frac{1}{2}$

x=$(-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k,\ k \epsilon Z$.

x=$(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \epsilon Z$.

Ответ: x=$(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \epsilon Z$.

б) $\mathbf{cos^2x - sin^2x}$**-cosx=0**

Воспользовавшимся тем, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде

$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$ −cosx =0

$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x$ −cosx =0

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$ Введем новую переменную Z=cosx, тогда

$2z^2 - z + 1 = 0$

$z_1 = 1$ и $z_2 = -\frac{1}{2}$

cosx=1 и cosx=$-\frac{1}{2}$

cosx=1 x=$2\pi k,\ k\epsilon Z$,

cosx=$-\frac{1}{2}$ x=$\pm$arccos(- $\frac{1}{2}$)+2 $\pi k,\ k\epsilon Z$,

x=$\pm\frac{2\pi}{3}$+2 $\pi k, k\epsilon Z$.

Ответ: x=$2\pi k,\ k\epsilon Z$; x=$\pm\frac{2\pi}{3}$+2 $\pi k, k\epsilon Z$.

Однородные тригонометрические уравнения.

Определение. Уравнения вида asinx+bcosx=0 однородным тригонометрическим уравнением **первой** степени; уравнение вида asin ^{2}x+bsinxcosx+c cos ^{2} x=0 называется тригонометрическим уравнением **второй** степени.

Если a и b однородного тригонометрического уравнения отличны от нуля то обе части уравнения делим на cosx , получим $\frac{\mathrm{asinx}}{\mathrm{cosx}} + \frac{\mathrm{bcosx}}{\mathrm{cosx}} = \frac{0}{\mathrm{cosx}}$ ⇨a tgx+b $= 0$

Пример 2.Решить уравнение 2sin^{2}x−3cosx=0

Решение: 2sin^{2}x-3cosx=0. Разделив обе части уравнения почленно на cosx получим:2tgx-3=0

2tgx=3

tgx= $\frac{3}{2}$

x=arctg$\frac{3}{2}$+ πk.

Ответ: x=arctg$\frac{3}{2}$+ πk.

Алгоритм решения тригонометрического уравнения второй степени $a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x=0$.

1.Посмотреть, есть ли в уравнении член $a\sin^2x$.

2.Если член $a\sin^2x$ в уравнении содержится (т.е. $a\neq 0$), то уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2x$ и последующим введением новой переменной z= tgx.

3.Если член $a\sin^2x$ в уравнении не содержится (т.е.a=0), то уравнение решается методом разложения на множители : за скобки выносят cosx.

Пример 3.Решить уравнение $\sin^2x-3\sin x\cos x+2\cos^2x=0$.

Решение: (Решаем, используя второй пункт алгоритма.) Разделив обе части уравнения почленно на $\cos^2x$, получим

$tg^2x-3tgx+2=0$. Введя новую переменную z= tgx, получим

$z^2-3z+2=0$;

$z_1=1, \quad z_2=2$

tgx=1, tgx=2.

tgx=1 x= arctg1+ $\pi k,\ k\epsilon Z$.

$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\epsilon Z$.

tgx=2 x= arctg2+ $\pi k,\ k\epsilon Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\epsilon Z$; x= arctg2+ $\pi k,\ k\epsilon Z$.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2x=0$

Решение. *(Решаем, используя третий пункт алгоритма.)* Решим уравнение разложением на множители. $\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2x=0$

$$\cos x(\sqrt{3}\sin x+\cos x)=0$$

$$\cos x=0 \text{ или } (\sqrt{3}\sin x+\cos x)=0$$

cosx=0, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\epsilon Z$

$\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$ – однородное уравнение первой степени, решим его делением обеих частей уравнения на cosx.

$\sqrt{3}\,tgx+1=0$

$tgx=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

x= arctg$(-\frac{1}{\sqrt{3}})+\pi k, k\epsilon Z$

x= $\frac{\pi}{6}+\ \pi k, k\epsilon Z$.

Ответ: $x=\ \frac{\pi}{4}+\ \pi k, k\epsilon Z$; $x=-\ \frac{\pi}{6}+\ \pi k, k\epsilon Z$.

Пример 5. Решим систему уравнений $\begin{cases} x-y=\frac{5\pi}{3}, \\ \sin x=2\sin y. \end{cases}$

Решение: Из первого уравнения находим:

y=x-$\frac{5\pi}{3}$. Тогда $2\sin y=\ 2\sin(x-\frac{5\pi}{3})$=2(sinxcos$\frac{5\pi}{3}-\boldsymbol{cosx}$sinx$\frac{5\pi}{3}$)

= 2(sinx$\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}cosx$)= sinx+$\sqrt{3}cosx$.

Второе уравнение примет вид:

sinx= sinx+$\sqrt{3}cosx$, откуда cosx $=0, x=\ \frac{\pi}{2}$+πn, где $n\in z$.

Далее находим:

y=x-$\frac{5\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$+$\pi n-\frac{5\pi}{3}=\ \pi n-\frac{7\pi}{6}, n\in z$.

Ответ: $x=\ \frac{\pi}{2}$+πn, где $n\in z$; $\pi n-\frac{7\pi}{6}, n\in z$.

Упражнения.

Решите уравнения.

37. а) 1+cosx+cos2x=0; б) 3cos ^{2}x$-$3sinx=0;

в) 4sinx=4$-$ cos ^{2}x; г) tgx+ctgx=2$\frac{1}{2}$.

38. а) cos $\frac{x}{2}$ =1+cosx; б) tgx$-$tg$(\frac{7\pi}{2}-x)$x=1;

в) 5cosx+12sinx=13; г) 3cosx$-$2sin2x=0.

39. а) 1-cosx=2sin$\frac{x}{2}$; б) 1+cosx=2cos$\frac{x}{2}$;

в) cos2x=2$\frac{1}{3}$sinx; г)$\sqrt{x}\ sinx-cosx=0$.

40. а) cosx+sinx=0; б) cos^{2}x-3sinxcosx=-1;

в) $3\cos^2x=4\sin x\cos x-\sin^2x$; г) $4\cos^2x-7\sin 2x=2$.

41. а) $\frac{1}{3cosx+4}=2$; б) $\frac{5}{3sinx+4}=2$;

в) $\frac{2}{3\sqrt{2}sinx-1}=1$; г) $\frac{2}{3\sqrt{2}cosx-1}=1$.

42. а) $\frac{3}{5tgx+8}=1$; б) $\frac{3}{5ctgx+8}=1$;

в) $\frac{4}{\sqrt{3}tgx+5}=\frac{1}{2}$; г) $\frac{4}{\sqrt{3c}tgx+5}=\frac{1}{4}$.

43. а) $\frac{2sinx+7}{1,5sinx+3}=2$ б) $\frac{2cosx+7}{1,5cosx+3}=2$

в) $\frac{6}{tg+2}=3-tgx$ г) $\frac{6}{ctg+2}=3-ctgx$

44. а) $\frac{15}{sinx+1}=11-2sinx$; б) $\frac{15}{cosx+1}=11-2cosx$;

в) $\frac{3}{tgx+1}=2ctgx-1$; б) $\frac{10}{tgx+2}=3-ctgx$.

45. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} sinx+cosy=0, \\ sin^2x+cos^2y=\frac{1}{2}; \end{cases}$. б) $\begin{cases} sinxcosy=0,25, \\ sinxcosy=0,75; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \mathrm{x}-\mathrm{y}=-\frac{1}{3}, \\ cos^2\pi x-cos^2\pi y=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \mathrm{x}+\mathrm{y}=\frac{\pi}{4}, \\ tgxtgy=\frac{1}{6}. \end{cases}$

Литература

а) основная литература

1. ЭБС «Znanium.com». Жавнерчик, В.Э. Справочник по математике и физике/ В.Э. Жавнерчик, Л.И. Майсеня, Ю.И. Савилова. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – 399 с.

2. ЭБС «Znanium.com» Дадаян, А.А. Математика.: учебник / А.А. Дадаян. - М.: Форум, 2013. - 544 с.

3.Дадаян, А.А. Математика: учебник/ А.А, Дадаян. – М.: Форум, 2011

4. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учеб. пособие/ А.А. Дадаян. – М.: Форум: ИНФРА-М, 2011

б) дополнительная литература

ЭБС «Znanium.com». Жавнерчик, В.Э. Справочник по математике и физике/ В.Э. Жавнерчик, Л.И. Майсеня, Ю.И. Савилова. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – 399 с.

ЭБС «Znanium.com» Дадаян, А.А. Математика.: учебник / А.А. Дадаян. - М.: Форум, 2013. - 544 с.