МИНОБРНАУКИ РОССИИ
филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Майкопский государственный технологический университет» в п. Яблоновском

Политехнический колледж

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЕН.01 МАТЕМАТИКА
для студентов очной и заочной форм обучения

для специальностей
38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям),
38.02.05 Товароведение и экспертиза качества потребительских товаров

Яблоновский, 2019 г.

УДК 51(07)
ББК 22.1
М-54

Одобрено предметной (цикловой) комиссией информационных и математических дисциплин
Протокол № ______от __________20____ г.

Председатель предметной (цикловой) комиссией информационных и математических дисциплин Схаплок А.А

Разработчик: Кошак Р.М.–преподаватель первой категории политехнического колледжа филиала федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Майкопский государственный технологический университет» в поселке Яблоновском

Содержание

1. Пояснительная записка

Данная методическая разработка составлена для студентов специальностей 38.02.01 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)» и 38.02.05 «Товароведение и экспертиза качества потребительских товаров» заочной и очной форм обучения.

Цель настоящего методического указания – оказание помощи студенту в приобретении навыков решения практических задач, для выполнения индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) и домашней контрольной работы (ДКР).

Программой «Математика» предусматривается изучение вопросов о месте и роли математики в современном мире, общности её понятий и представлений; использовании математических методов при решении прикладных задач.

В пособии излагаются теоретические сведения из курса высшей алгебры, необходимые для выполнения заданий различного уровня сложности, которые сопровождаются подробным решением, что в значительной мере облегчает усвоение материала и выполнение работы.

2. Содержание дисциплины

Раздел 1. Основные понятия и методы линейной алгебры

Студент должен

знать: матрицы, действия над матрицами; решение систем линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса, методом обратной матрицы;

уметь: решать системы линейных уравнений разными методами.

иметь представление: о месте и роли математики в современном мире.

Определение. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij}, где $i = 1,2,..,m$, $j = 1,2,..n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов.

Определение. Суммой $A+B$ матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ размера $m \times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц *A* и *B:* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,2,..,m$, $j = 1,2,..n$.

Определение. Произведением *αA* матрицы $A=(a_{ij})$ на число α называется матрица $B=(b_{ij})$, элементы которой $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

Пример 1. Вычислить 3A+2B, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad 2B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2 & 9-4 \\ -3+6 & 6-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Определение. Произведением AB матрицы $A=(a_{ij})$ размера $m \times n$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размера $n \times k$ называется матрица $C=(c_{ij})$ размера $m \times k$, элемент которой c_{ij}, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы A и j-ого столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj},$$

$$i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,k.$$

Так как строки и столбцы матриц участвуют в произведении AB неравноправно, то AB≠BA.

Пример 2. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим элементы первой строки первой матрицы на соответствующие элементы первого столбца второй матрицы и сложим все произведения. Полученный элемент поставим в первую строку и первый столбец матрицы-произведения. Далее вычислим остальные элементы произведения матриц.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 3+8\cdot 4-4\cdot 9 & 5\cdot 2-8\cdot 1-4\cdot 6 \\ 6\cdot 3+9\cdot 4-5\cdot 9 & 6\cdot 2-9\cdot 1-5\cdot 6 \\ 4\cdot 3+7\cdot 4-3\cdot 9 & 4\cdot 2-7\cdot 1-3\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -22 \\ 9 & -27 \\ 13 & -17 \end{pmatrix}.$$

Матрицу

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называют единичной. Легко проверить, что $AE = A$, если, конечно, число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы E, и $EA=A$.

Если матрица A имеет одинаковое число строк и столбцов, то ее называют квадратной.

Определение. Определителем квадратной матрицы A называется определитель, составленный из ее элементов.

Обозначают определитель матрицы A либо $det\ A$ (от слова детерминант, т.е. определитель), либо $|A|$, либо D, либо Δ.

Определение. Квадратная матрица A называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрицу называют вырожденной.

Определение. Матрица A^{-1} такая, что $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$, называется обратной матрице A.

Если A – невырожденная матрица, то существует и при этом единственная матрица, обратная к матрице A. При этом

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения к элементам исходной матрицы.

Замечание. Следует обратить внимание на то, что алгебраические дополнения к элементам строк матрицы A располагают в столбцах с теми же номерами, что и строки данной матрицы A.

Пример 3. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-5 & 3\\ 7 & -1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & 7\end{vmatrix}=1(5-21)-2(-3-6)+$$

$$+1(21+10)=-16-2(-9)+31=33.$$

Найдем алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A:

$A_{11}=\begin{vmatrix}-5 & 3\\ 7 & -1\end{vmatrix}=5-21=-16$, $A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 7 & -1\end{vmatrix}=-(-2-7)=9$,

$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -5 & 3\end{vmatrix}=6+5=11$,

$A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-(-3-6)=9$, $A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-2=-3$,

$A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=0$,

$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & 7\end{vmatrix}=21+10=31$, $A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 7\end{vmatrix}=-(7-4)=-3$,

$A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -5\end{vmatrix}=-5-6=-11$.

$$A^{-1}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}-16 & 9 & 11\\ 9 & -3 & 0\\ 31 & -3 & -11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{33} & \frac{9}{33} & \frac{11}{33}\\ \frac{9}{33} & -\frac{3}{33} & 0\\ \frac{31}{33} & -\frac{3}{33} & -\frac{11}{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0\\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Решение систем линейных уравнений методом Кремера

1. Решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$$

решается с помощью формул Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix},\qquad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix},\ \Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

При решении системы возможны три случая:

1. Определитель системы $\Delta\neq0$. Тогда система имеет единственное решение, определяемое формулами Кремера.

2. Определитель системы $\Delta=0$. Если при этом хотя бы один из определителей Δx_1 и Δx_2 не равен нулю, то система не имеет решений.

3. Если $\Delta=0$, $\Delta x_1=0$, и $\Delta x_2=0$, то одно из уравнений есть следствие другого, система сводится к одному уравнению с двумя неизвестными и имеет бесчисленное множество решений.

Пример1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 + 7x_2 = 81. \end{cases}$

Решение.

Вычислим определитель системы и дополнительные определители:

$$\Delta == \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 31,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 13 & -5 \\ 81 & 7 \end{vmatrix} = 496,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 81 \end{vmatrix} = 217.$$

Система имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{496}{31} = 16, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{217}{31} = 7.$$

Ответ: (16; 7).

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 = 8. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 48 = 44 \neq 0,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 2 = 22 \neq 0.$$

Коэффициенты уравнений системы пропорциональны, а свободные члены не подчинены той же пропорции. Система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1, \\ 3x_1 - 9x_2 = 3. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

и дополнительные определители

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = 0,$ то одно уравнение есть следствие другого (второе уравнение получено из первого умножением на 3).

Система сводится к одному уравнению и имеет бесчисленное множество решений, каждое из которых вычисляется по формуле: $x_1 = 1 + 3x_2$, где числовые значения x_2 задаются произвольно и вычисляются соответствующие значения x_1.

Ответ: $x_1 = 1 + 3x_2$ – общее решение данной системы, а решения $x_2 = 1, x_1 = 4$ – частные.

2. Система из двух уравнений с тремя неизвестными

Решим систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}.$$

Из основной матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

при помощи поочередного вычеркивания столбцов получаем определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Дополнительные определители:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{13} & b_1 \\ a_{23} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Возможны три случая:

1. Если из трех определителей

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

хотя бы один не равен нулю, то система имеет бесчисленное множество решений, причем одному неизвестному можно дать любое значение. Пусть, например, отличен от нуля Δ_3, тогда неизвестному x_3 можно придать любое значение (если $\Delta_1 \neq 0$, то x_1, если $\Delta_2 \neq 0$, то x_2), а исходную систему переписать в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 - a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 - a_{23}x_3 \end{cases}.$$

Отсюда неизвестные x_1 и x_2 определяются по формулам Крамера.

2. Все определители $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, но один из определителей,

$\begin{vmatrix} a_{12} & \mathrm{b}_1 \\ a_{22} & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{13} & b_1 \\ a_{23} & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}$

не равен нулю. В этом случае система несовместна, то есть не имеет решений.

3. Все выписанные определители равны нулю. Система имеет бесчисленное множество решений.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2{,}5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение. Основная матрица системы

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

$$\Delta_3 = 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \neq 0,$$

система имеет бесчисленное множество решений.

Любое значение можно придать одному из неизвестных x_2 или x_3, так как $\Delta_2 \neq 0$ и $\Delta_3 \neq 0$. Неизвестному x_1 придать любое значение нельзя, так как $\Delta_1 = 0$.

Решим систему относительно x_1 и x_2 :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2{,}5 - 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 + 4x_3 \end{cases}$$. Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Вычислим

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2{,}5 - 2x_3 & -1 \\ 1 + 4x_3 & 2 \end{vmatrix} = 1{,}5$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 2{,}5 - 2x_3 \\ 2 & 1 + 4x_3 \end{vmatrix} = 2x_3 - 1$$

Ответ: $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 2\mathrm{x}_3 - 1$, $x_3 \in R$ – общее решение системы.

Система из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

При решении системы из трех уравнений с тремя неизвестными возможны три случая:

1. Определитель системы

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера :
$x_1 = \frac{\varDelta x_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\varDelta x_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\varDelta x_3}{\Delta}$,

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}, \qquad \varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Определитель системы равен нулю, $\Delta=0$. Если при этом хотя бы один из определителей Δx_1, Δx_2 Δx_3, не равен нулю, то система несовместна, решений не имеет.

3. Если $\Delta=0$ и $\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=0$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33$$

и дополнительные определители

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33 \qquad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33$$

$\Delta_{x_3} = 33$.

По формулам Кремера имеем, что

$x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Ответ: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Раздел 2. Основные понятия и методы математического анализа

Студент должен

знать:

предел функции в точке; основные свойства пределов, предел функции на бесконечности; виды разрывов; общие понятия связанные с асимптотами;

уметь:

- находить предел функции в точке и на бесконечности, используя свойства пределов; находить точки разрыва функций и асимптот.

иметь представление:

- о месте и роли математики в современном мире; об основных методах вычисления пределов функции на бесконечности.

Определение предела функции. Пусть функция f(x) определена на некотором промежутке X* и пусть точка $x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$.

Число A называется пределом функции f(x), если для любого числа $\varepsilon \succ 0$ существует число $\delta \succ 0$ такое, что для всех $x \in X, x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $\lfloor x - x_0 \rfloor \prec \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| \prec \varepsilon$.

ПРИМЕР 1. Используя определение, доказать, что функция f(x) = 3x – 2 в точке x = 1 имеет предел, равный единице, т.е. $\lim\limits_{x \to 1}(3x - 2) = 1$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon \succ 0$. Задача состоит в том, чтобы по этому $\varepsilon \succ 0$ найти такое $\delta \succ 0$, при котором из неравенства $\lfloor x - 1 \rfloor \prec \delta$ следовало бы неравенство $|f(x) - 1| = |(3x - 2) - 1| < \varepsilon$. Преобразуя последнее неравенство, получаем $|3(x-1)| < \varepsilon$, или $|x - 1| < \varepsilon/3$. Отсюда видно, что если взять $\delta \leq \varepsilon/3$, то для всех ч, удовлетворяющих неравенству $|x - 1| < \delta$, выполняется неравенство

Свойства пределов

Теорема. Пусть функции f(x) и g(x) имеют в точке x_0 пределы B и C. Тогда функции f(x) ± g(x), f(x)·g(x) , и f(x) / g(x) имеют в точке x_0 пределы, равные соответственно B±C, B·C, B/C, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = B \pm C$, $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = B \cdot C$, $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x)/g(x)] = B/C$.

Замечание. *Теорема верна также и в случае, когда x_0 является одним из символов* $-\infty, +\infty, \infty$.

ПРИМЕР 2. а) Найти $\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 + x + 5)$

Решение. На основании выше изложенной теоремы, имеем $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+x+5)=\lim\limits_{x\to 1}3x^2+\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}5=3\cdot 1^2+1+5=9$.

б) Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$

Решение. Пределы числителя и знаменателя $x\to 3$ равно нулю: $\lim\limits_{x\leftarrow 3}(x^2-5x+6)=3^2-5\cdot 3+6=0,\quad \lim\limits_{x\to 3}(3x^2-9x)=3\cdot 3-9\cdot 3=0.$ Разложим квадратный трехчлен в числителе на линейные множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни трехчлена. Разложив на множители и знаменатель, сократим дробь на x-3. Используя следствие 4, получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{3x}=\frac{3-2}{3\cdot 3}=\frac{1}{9}.$$

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x}=0$ (а – любое число).

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(a\cdot x)=\infty$ (а – любое число).

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(a\pm x)=\infty$ (а – любое число).

ПРИМЕР 3. Найти $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}$.

Решение. Имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Непосредственно теорему применить нельзя. Необходимо, как говорят, раскрыть эту неопределенность. Для этого разложим числитель на множители и сократим на общий множитель x+2, который обращает в нуль знаменатель и числитель дроби. Получаем

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+4)}{(x^2-2x+4)}$$

Так как знаменатель теперь не равен нулю, то неопределенность $\frac{0}{0}$ раскрыта.

Имеем $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+4)}{(x^2-2x+4)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -2}(x+4)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+4)}=\dfrac{-2+4}{(-2)^2-2(-2)+4}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.

ПРИМЕР 4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{(x^2-25)(2+\sqrt{x-1})}{(2-\sqrt{x-1})(2+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to 5}\frac{(x^2-25)(2+\sqrt{x-1})}{4-(x-1)}=$$
$$\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)(2+\sqrt{x-1})}{-(x-5)}=-\lim_{x\to 5}(x+5)(2+\sqrt{x-1})=-10\cdot 4=-40.$$

Точки разрыва функции. Асимптоты

Определение. Если функция $y=f(x)$ при $x=a$ имеет разрыв, то для выяснения характера разрыва следует найти предел функции $f(x)$ при $x\to a$ слева и справа.

В зависимости от характера поведения функции в окрестности точки разрыва различают два основных вида разрывов:

1) *разрыв 1 рода* – в этом случае существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$;

2) *разрыв 2 рода* – в этом случае хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ не существует или бесконечен.

ПРИМЕР 5. Для заданной функции найти точки разрыва и исследовать их характер: $y=\dfrac{x}{x-3}$.

Решение. Данная функция определена при всех значениях *x*, кроме x=3. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения. Таким образом, единственной точкой разрыва служит точка x=3. Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы функции при $x\to 3$:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x}{x-3}=-\infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to 3+0}\frac{x}{x-3}=+\infty .$$

Следовательно функция $y=\dfrac{x}{x-3}$ в точке x=3 имеет бесконечный разрыв, т.е. x=3 – точка разрыва второго рода.

Определение. *Асимптотой кривой* называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее, от начала координат.

Различают вертикальные, горизонтальные, и наклонные асимптоты.

Вертикальные асимптоты. График функции y=f(x) при $x \to a$ имеет вертикальную асимптоту, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$; при этом точка x=a есть точка разрыва второго рода. Уравнение вертикальной асимптоты имеет вид x = a (рис.3).

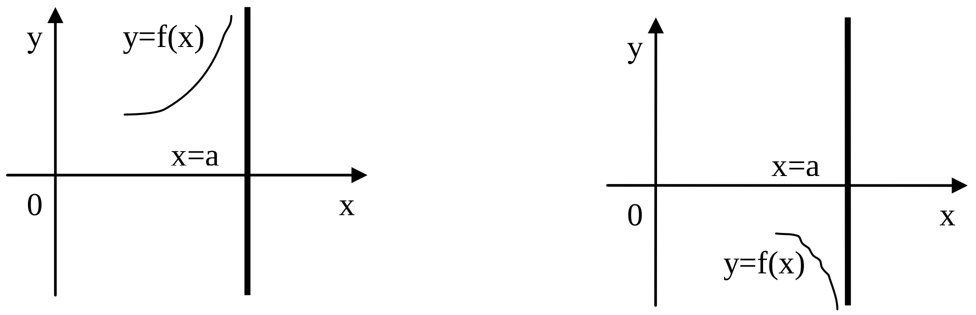


рис.3

Горизонтальные асимптоты. График функции y=f(x) при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ имеет горизонтальную асимптоту, если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b_1$.

Может оказаться, что либо только один из этих пределов конечный, либо ни одного, тогда график имеет или одну вертикальную асимптоту, или ни одной. Уравнение горизонтальной асимптоты имеет вид y = b (рис.4).

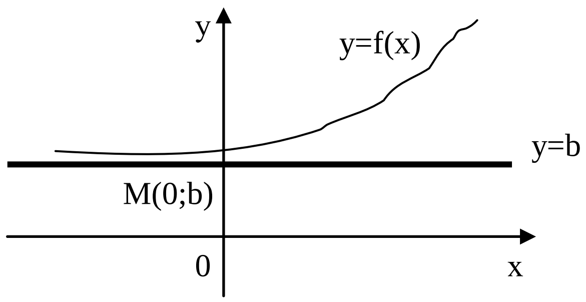


рис.4

Наклонные асимптоты. Пусть график функции y=f(x) имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$. В этом случае справедливо равенство

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx - b] = 0$. Вынося x за скобки, получим $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$. Так как

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\frac{b}{x} \right] = 0$, то отсюда получаем формулы для вычисления параметров k и b:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = \quad \text{и} \quad \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = b$$

ПРИМЕР 6. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x+5}{x-3}$.

Решение. Точка $x = 3$ - точка разрыва второго рода данной функции, причем $\lim\limits_{\substack{x \to 3-0 \\ (x \to 3+0)}} \frac{x+5}{x-3} = -\infty(+\infty)$; следовательно, прямая $x = 3$ – вертикальная асимптота.

Так как $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+5}{x(x-3)} = 0$, график функции наклонных асимптот не имеет.

Находим горизонтальную асимптоту: $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{x+5}{x-3} = 1$. Таким образом, график данной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$.

Вопросы для самоконтроля:

1.Дать определение предела функции в точке.
2.Перечислить основные свойства пределов.
3.Вычислить предел $\lim\limits_{x \to -1} (4x^3 - \frac{x^2}{5} + 3)$
4.Как раскрывается неопределенность вида $\frac{0}{0}$ **?**
5.Как раскрывается неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ **?**
6. Когда мы можем сказать, что функция имеет разрыв первого рода?
7. Когда мы можем сказать, что функция имеет разрыв второго рода?
8. Какие типы асимптот вы знаете?

Раздел 3. Дифференциальное и интегральное исчисление

Студент должен

знать:
- понятие производной и дифференциала, геометрический и физический смысл производной, правила дифференцирования;

уметь:
- находить производную первого и второго порядка, производную сложной функции, используя правила дифференцирования;

иметь представление:
- о методах решения прикладных задач с помощью производной.

Методические указания

Приступая к выполнению контрольной работы необходимо изучить определение производной функции, правила дифференцирования. Изложим только основные понятия связанные с производной.

Определение. Производной функции y = f(x) в точке x = x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента $\Delta x = (x_0+\Delta x)-x_0$, когда последнее стремится к нулю. Обозначается производная функции y' = f'(x).

Итак, имеем $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Геометрический смысл

Определение. Производная функции *y = f(x)* при данном значении аргумента *x* = x_1 равна угловому коэффициенту касательной (k) проведенной к графику этой функции в точке, абсцисса которой равна x_1: $y' = tg\alpha$, или $y' = k$

ПРИМЕР 7. Дана кривая $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x$. Найти наклон этой кривой в точке, абсцисса которой равна 6.

Решение. Найдем производную этой кривой: $y' = \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x\right)' = \frac{1}{2}x - 2$.

При x = 6 получим $k = y'(6) = \frac{1}{2} \cdot 6 - 2 = 1 = tg\alpha$.

Физический смысл

Определение. Средняя скорость изменения функции y для промежутка значений аргумента от x до $x + \Delta x$ выражается отношением

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ показывает, сколько единиц приращения функции приходится на единицу приращения аргумента.

Мгновенная (или истинная) скорость изменения функции при данном значении x есть предел, к которому стремится средняя скорость $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ в промежутке изменения аргумента от x до $x + \Delta x$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Для линейной функции $y = kx + b$ средняя скорость $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ и истинная скорость $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ совпадают по величине и численное значение истинной скорости равно коэффициенту *k*.

ПРИМЕР 8. Найти среднюю скорость изменения функции $y=3x^2 - 6$ при изменении x от $x_1=3$ до $x_2=3{,}5$.

Решение. Найдем приращение аргумента: $\Delta x = x_2 - x_1 = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$

Определим значения функции при x_2 и x_1: $У_1 = 3*3^2 - 6 = 21$, $y_2 = 3*(3{,}5)^2 - 6 = 30{,}75$

Вычислим приращение функции: $\Delta y = y_2 - y_1 = 30{,}75 - 21 = 9{,}75$.

Находим среднюю скорость изменения функции: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9{,}75}{0{,}5} = 19{,}5$.

Основные правила дифференцирования

Если *C* - постоянное число, *u=u(x), v=v(x)*- функции, имеющие производные, тогда:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(Cu)' = Cu'$
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

Формулы дифференцирования основных функций

(дифференцирование функции)

При условии $u = \varphi(x)$	При условии $u = x$
$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ где n – любое действительное число	$C'=0$ $X'=1$ $(x^n)' = nx^{n-1}x'$ где n – любое действительное число

$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}u'$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}x'$
$\left(\sqrt{u}\right)=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'$	$\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}x'$
$(\ln u)'=\frac{1}{u}u'$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}x'$
$(\lg u)'=\frac{0{,}4343}{u}u'$	$(\lg x)'=\frac{0{,}4343}{x}x'$
$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$	$(a^x)'=a^x\ln a\cdot x'$
$(e^u)=e^u\cdot u'$	$(e^x)=e^x\cdot x'$
$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$	$(\sin x)'=\cos x\cdot x'$
$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$	$(\cos x)'=-\sin x\cdot x'$
$(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$	$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot x'$
$(ctgu)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$	$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot x'$
$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u',\lvert u\rvert<1$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x',$
$(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u',\lvert u\rvert<1$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x',\lvert x\rvert<1$
$(arctgu)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$	$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}\cdot x'$
$(arcctgu)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$	$(arcctgu)'=-\frac{1}{1+x^2}\cdot x'$

ПРИМЕР 9. Найти производные функций: 1) f(x) = 5 + x^3 + $3x^2$ + sin x + 2tg x;

2) f(x) = $\frac{x^2-1}{x^2+1}$; 3) f(x) = x sin x.

Решение.

1) f ‘ (x) = (5 + x^3 + $3x^2$ + sin x + 2tg x) ‘ = (5)’ + (x^3)’+ ($3x^2$)’+ (sin x)’ + (2tg x)’ =

= $3x^2$ + 6x + cos x + 2 / $\cos^2$x

2) f ‘ (x) = ($\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$)’= $\dfrac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$ = $\dfrac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}$ =

$=\dfrac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}$ = $\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

3) f ‘(x) = (x sin x)’ = (x)’sin x + (sin x)’ x = 1*sin x + x cos x = sin x + x cos x.

ПРИМЕР 10. Найти производную функции: $y=\left(3+x^3\right)\cdot\left(\ln x-x^2\right)$

Решение.

$$y'=\left(\left(3+x^3\right)\cdot\left(\ln x-x^2\right)\right)'=\left(3+x^3\right)'\cdot\left(\ln x-x^2\right)+\left(\ln x-x^2\right)'\cdot\left(3+x^3\right)=$$
$$=3x^2\cdot\left(\ln x-x^2\right)+\left(\frac{1}{x}-2x\right)\cdot\left(3+x^3\right).$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Определение производной функции
2. В чем заключается геометрический смысл производной?
3. В чем заключается физический смысл производной?

Производные обратных тригонометрических функций

ПРИМЕР 11. Найти производную функции f(x) = arcsin 2x, вычислить f ‘(-1/4).

Решение.

f ' (x) = (arcsin 2x)’= $\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}(2x)'$ = $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}2$ = $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

f '(-1/4) = $\dfrac{2}{\sqrt{1-4(-1/4)^2}}$ = $\dfrac{2}{\sqrt{1-1/4}}$ = $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

ПРИМЕР 12. Найти производную функции: $y=\left(3+\arcsin x\right)\cdot\left(2\arccos – 7\right)$

Решение.

$$y'=\left(\left(3+\arcsin x\right)\cdot\left(2\arccos x-7\right)\right)'=$$
$$=\left(3+\arcsin x\right)'\cdot\left(2\arccos x-7\right)+\left(2\arccos x-7\right)'\cdot\left(3+\arcsin x\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(2\arccos x-7\right)-\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot\left(3+\arcsin x\right).$$

Производная сложной функции

Если имеется сложная функция y = f [h(x)], то $y_x' = f_h'(h)\cdot h_x'(x)$ – производная сложной функции.

ПРИМЕР 13. Найти производные сложных функций: 1) f (x) = cos ^{6} (3x^2 – 5);

2) $f(x) = \ln(x - \sqrt{1+x^2})$.

Решение.

1) Если обозначим функцию $\cos(3x^2 - 5) = u$, то для нахождения производной используем формулу $(u^n)' = nu^{n-1}u'$, где n=6, тогда получим

$f'(x) = (\cos^6(3x^2 - 5))' = 6\cdot \cos^5(3x^2 - 5) \cdot (\cos(3x^2 - 5))'$

Теперь обозначим $3x^2 - 5 = t$ и воспользуемся формулой $(\cos t)' = -\sin t \cdot t'$, получим

$(\cos(3x^2 - 5))' = -\sin(3x^2 - 5) \cdot (3x^2 - 5)' = -\sin(3x^2 - 5) \cdot 6x$, подставим в искомую производную функции:

$f'(x) = 6 \cdot \cos^5(3x^2 - 5) \cdot (-\sin(3x^2 - 5)) \cdot 6x = -36x \cdot \cos^5(3x^2 - 5) \cdot \sin(3x^2 - 5)$

2) Аналогично рассмотренному примеру обозначим $x - \sqrt{1+x^2} = u$, тогда

$f'(x) = (\ln u)' = \frac{1}{u}u'$, получим

$$f'(x) = [\ln(x - \sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(x - \sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot (1 - (\frac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}-1}(1+x^2)')=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot (1 - \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{(1-x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{(1-x)}{|1+x^2|}$$

Производные высших порядков

Производная $f'(x)$ называется *производной первого порядка*. Производная от $f'(x)$ называется *производной второго порядка (или второй производной*) от функции $f(x)$ и обозначается y'' или $f''(x)$. Производная от $f''(x)$ называется *производной третьего порядка (или третьей производной)* от функции $f(x)$ и обозначается y''' или $f'''(x)$ и т.д.

Производная n – го порядка есть производная от производной (n – 1)-го порядка, т.е. $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Производные начиная со второго порядка называются *производными высшего порядка.*

ПРИМЕР 14. Найти производную второго порядка от функции $y = \operatorname{tg} x$

Решение.

$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$y'' = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = \frac{(1)`\cos^2 x - (\cos^2 x)`1}{\cos^4 x} = \frac{-2\cos\ x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\cos\ x\sin x}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

Вопросы самоконтроля:

1. Как найти производную сложной функции.
2. Как найти производную второго и третьего порядка.
3. Перечислите основные формулы дифференцирования.

Возрастание и убывание функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке $]a,b[$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку и таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) \prec f(x_2)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на промежутке $]a,b[$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку и таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) \succ f(x_2)$.

Как возрастающие, так и убывающие функции называются *монотонными*, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает, - *промежутками монотонности*.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной: если в некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция *возрастает* в этом промежутке; если же $f'(x) < 0$, то функция *убывает* в этом промежутке.

ПРИМЕР 15. Найти промежутки монотонности следующей функции $f(x) = x^2 - 8x + 12$.

Решение. Находим производную $f'(x) = 2x - 8$; имеем $2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Исследуем знак производной на интервалах $]-\infty,4[$ и $]4,+\infty[$ методом пробных точек. Последующие рассуждения представим в таблице.

x	$]-\infty,4[$	4	$]4,+\infty[$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Таким образом, данная функция в промежутке $]-\infty,4[$ убывает, а в промежутке $]4,+\infty[$ возрастает.

Вопросы самоконтроля:

1. Какая функция называется возрастающей?
2. Какая функция называется убывающей?
3. Какие функции называются монотонными?

Исследование функций на экстремум

Исследование функции на экстремум с помощью первой производной.

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти критические точки 1 рода функции $y = f(x)$, т.е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

3. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические значения точки делят область определения функции $y = f(x)$. При этом критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка в котором $f'(x) \succ 0$, и точка максимума – в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

4. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Исследование функции на экстремум с помощью второй производной.

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти стационарные точки данной функции $y = f(x)$, т.е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль.

3. Найти вторую производную $f''(x)$.

4. Исследовать знак второй производной в каждой из стационарных точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то минимум. Если же вторая производная равна нулю, то экстремум функции надо искать с помощью первой производной.

5. Вычислить значения функции в точках экстремума.

ПРИМЕР 16. Исследовать на экстремум с помощью второй производной функцию $f(x)=x^3-9x^2+24x-12$.

Решение. Следуем пунктам правила:

1. Находим производную:

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24;$

2. $(3x^2 - 18x + 24 = 0) \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 8 = 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 4. \end{array}\right.$

3. Найдем $f''(x) = 6x - 18$.

4. Определим знак второй производной в критических точках. Так как $f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 < 0,$ то при x=2 функция имеет максимум; так как $f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 > 0,$ то при x=4 функция имеет минимум.

5. Вычислим значение функции в точках экстремума: $f_{\max} = f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 12 = 8,\ \ f_{\min} = f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 12 = 4.$

Определение. График дифференцируемой функции *y = f(x)* называется ***выпуклым*** на интервале (*a, b*), если дуга кривой на этом промежутке расположена ниже касательной, проведенной к графику функции *y = f(x)* в любой точке $x \in (a, b)$.

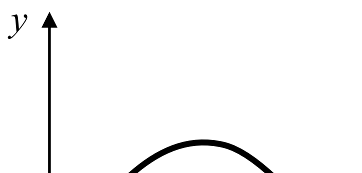
Определение. График дифференцируемой функции *y = f(x)* называется ***вогнутым*** на интервале (*a, b*), если дуга кривой на этом промежутке расположена выше касательной, проведенной к графику функции *y = f(x)* в любой точке $x \in (a, b)$.

Кривая выпукла (вогнута) в некотором промежутке, если она выпукла (вогнута) во всех точках этого промежутка.

Промежутки выпуклости и вогнутости кривой можно находить с помощью производной.

Определение. *Если вторая производная функции y = f(x) в данном промежутке положительна, то кривая вогнута в этом промежутке, а если отрицательна – выпукла в этом промежутке.*

Как уже отмечалось, иногда кривая в одной своей части выпукла, а в другой вогнута; так, например, часть синусоиды выпукла выше оси Ox и вогнута ниже оси Ox, причем точка A служит границей между ними. Эта точка носит название точки перегиба.



A *x*

0

Определение. *Точкой перегиба* кривой называется такая точка, которая отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой.

Правила исследования функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба

1. Найти вторую производную функции $f''(x)$.
2. Найти точки, в которых вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует.
3. Исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах выпуклости и вогнутости, и наличии точек перегиба.
4. Найти значения функции в точках перегиба.

ПРИМЕР 17. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции

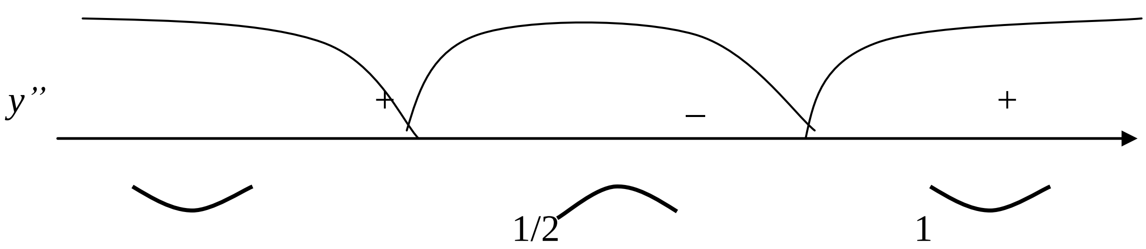
$y = x\,(x-1)^3$.

Решение. 1. Найдем первую, а затем и вторую производную данной функции

$y'' = 12\,(x-1)\,(x-1/2)$.

2. Найдем критические точки $y'' = 0$ при $x_1 = 1/2$ и $x_2 = 1$.

3. Разбиваем область определения функции на промежутки критическими точками и исследуем знак второй производной :



y” > 0 на интервалах $(-\infty, \frac{1}{2})$ *и* $(1, +\infty)$, следовательно, на этих интервалах функция вогнута; *y” < 0* на интервале (1/2, 1), следовательно, функция на нем выпукла, а $x_1 = 1/2$ и $x_2 = 1$ есть точки перегиба.

4.Значения функции в очках перегиба *f(1/2) = - 1/16 , f(1) = 0* .

Вопросы самоконтроля:

1. Как исследовать функцию на экстремум с помощью первой производной?
2. Как исследовать функцию на экстремум с помощью второй производной?

Исследование функции с помощью производной

Изучение заданной функции и построение её графика целесообразно проводить в следующем порядке:

1) найти область определения функции;

2) найти точки пересечения графика функции с осями координат;

3) найти асимптоты;

4) найти точки возможного экстремума;

5) найти критические точки;

6) с помощью вспомогательного рисунка исследовать знак первой и второй производных. Определить участки возрастания и убывания функции, найти направление выпуклости графика, точки экстремума и точки перегиба;

7) построить график, учитывая исследование, проведенное в п. 1)-6).

ПРИМЕР 18. Построить по изложенной выше схеме график функции f(x) =

$\frac{x^2+1}{x^2-1}$

Решение.

1) областью определения функции является множество всех вещественных чисел, кроме x = 1(в этом случае знаменатель обращается в нуль).

2) так как уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет вещественных корней, то график функции не имеет точек пересечения с осью Ox, но пересекает ось Oy в точке (0; -1).

3) выясним вопрос о существовании асимптот. Исследуем поведении функции вблизи точки разрыва x = 1. Так как y $\to -\infty$ при x$\to 1-, y \to +\infty$ при $x \to 1+$, то прямая x = 1 является вертикальной асимптотой графика функции.

Если $x \to +\infty (x \to -\infty)$, то $y \to +\infty (y \to -\infty)$; следовательно, горизонтальной асимптоты у графика нет. Далее из существования пределов

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+1/x^2}{1-1/x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x)-kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+1}{x^2-1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+1/x}{1-1/x} = 1$$

вытекает, что при $x \to \infty$ график функции имеет наклонную асимптоту $y=x+1$.

4) для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную функции:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

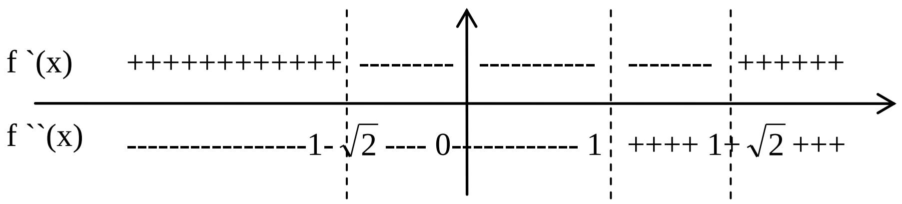
Решая уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$, получаем две точки возможного экстремума: $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 1+\sqrt{2}$.

5) для нахождения критических точек вычислим вторую производную:

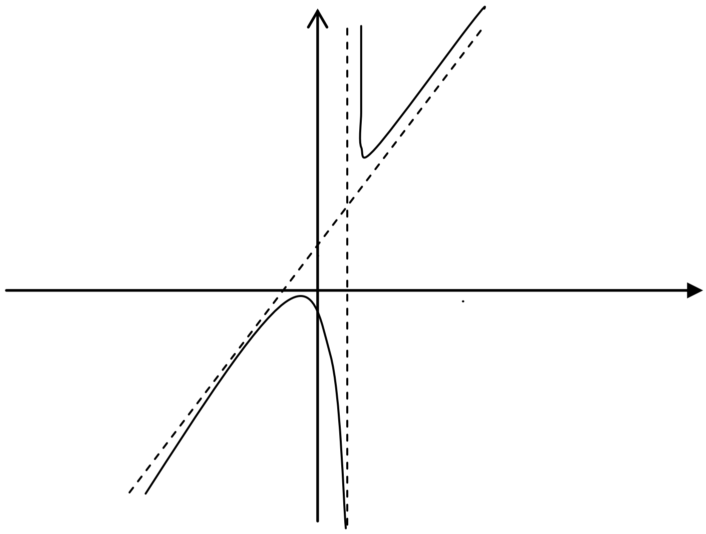
$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Так как f ``(x) в нуль не обращается, то критических точек нет.

6) Строим вспомогательный рисунок и исследуем знак первой и второй производной. Точки возможного экстремума, подлежащие рассмотрению: $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 1+\sqrt{2}$, - разделяют область существования функции на интервалы: $(-\infty, 1-\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ и $(1+\sqrt{2}, +\infty)$.



В каждом из этих интервалов производная сохраняет знак: в первом – плюс, во втором – минус, в третьем – плюс. Получаем, что функция на : $(-\infty, 1-\sqrt{2})$ и $(1+\sqrt{2}, +\infty)$ возрастает, а на $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ – убывает. Точки экстремума: максимум при $x = 1-\sqrt{2}$, причем $f(1-\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$; минимум при $x = 1+\sqrt{2}$, причем $f(1+\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$. На $(-\infty, 1)$ график направлен выпуклостью вверх, а на $(1, +\infty)$ - вниз.7) по полученным данным строим эскиз графика



ПРИМЕР 19. Построить график функции $f(x) = x^3 - 12x + 4.$

Решение. 1) Область определения $(-\infty, +\infty)$. Функция непрерывна во всей области определения.

2) Если x = 0, то y = 4, т.е. график функции пересекает ось ординат в точке (0, 4).

3) Асимптот график функции не имеет (проверьте самостоятельно).

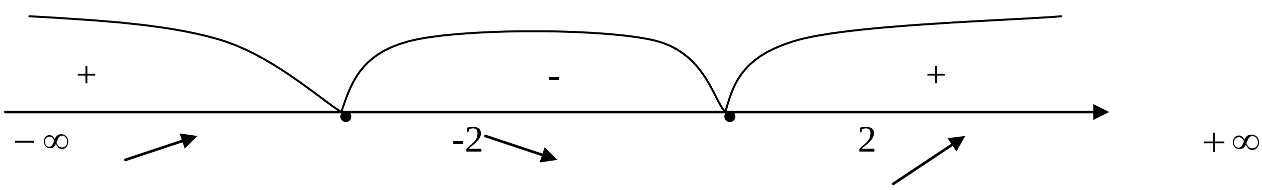
4) Находим интервалы монотонности, для этого найдем производную функции $f'(x) = 3x^2 - 12$, приравняем ее к нулю.

$3x^2 - 12 = 0, \quad 3(x-2)(x+2) = 0; \qquad x_1 = 2, \; x_2 = -2$ - это критические точки функции. Область определения функции разделим на промежутки критическими точками и исследуем каждый промежуток:

$(-\infty, -2) - y'(-3) = 3(-3)^2 - 12 = 15 > 0$ - функция возрастает;

$(-2, 2) - y'(0) = 3(0)^2 - 12 = -12 < 0$ - функция убывает;

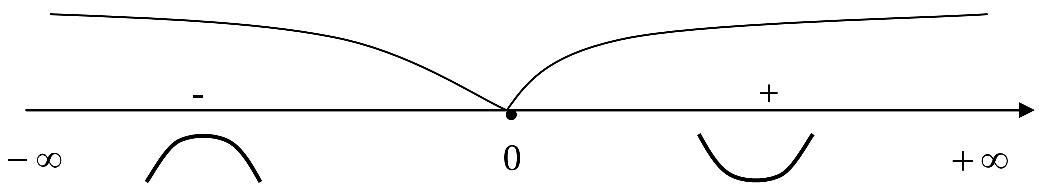
$(2, +\infty) - y'(3) = 3(3)^2 - 12 = 15 > 0$ - функция возрастает



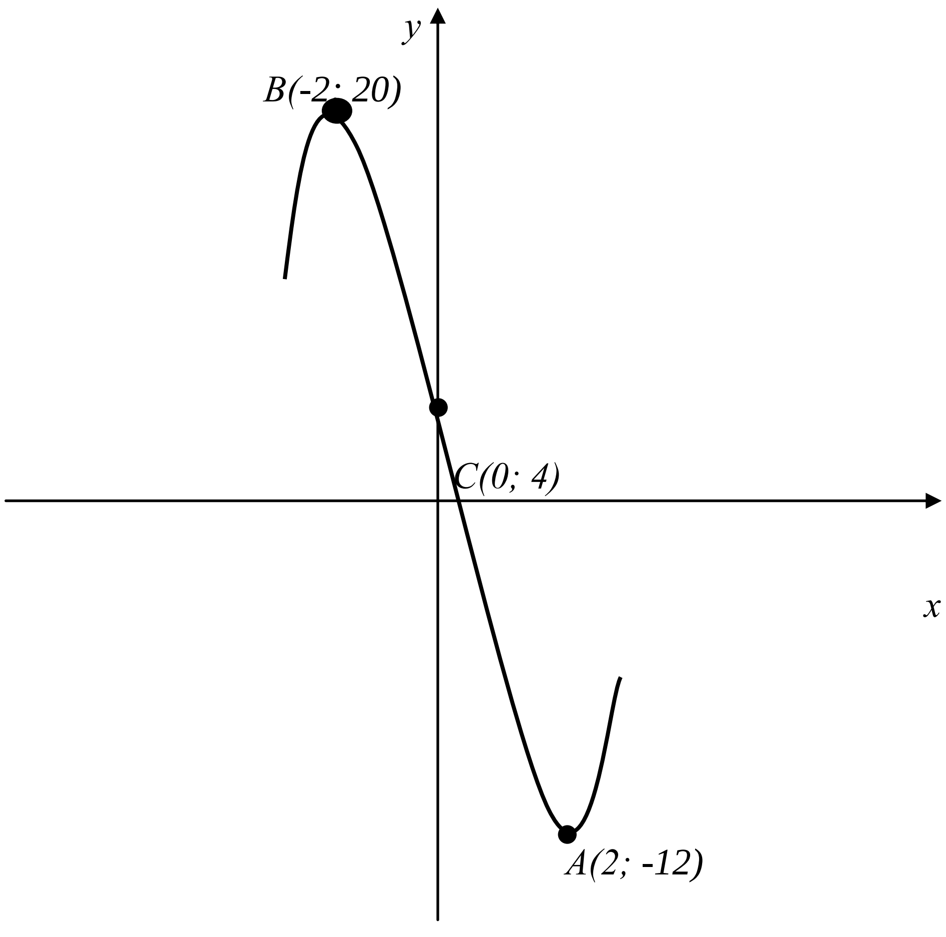
Исследуем функцию на экстремум. Из п.4 видно, что при x = -2 функция имеет максимум:

$y(-2) = (-2)^3 - 12\ (-2) + 4 = 20$, а при $x = 2$ – минимум: $y(2) = 2^3 - 12 * 2 + 4 = -12$.

5) Находим $f''(x) = (3x^2 - 12)' = 6x;\ 6x = 0;\ x = 0.$ Определим знаки второй производной слева и справа от точки $x = 0$: $y''(-1) = -6 < 0$;
$y''(1) = 6 > 0$. Следовательно, в промежутке $(-\infty,0)$ кривая выпукла, а в промежутке $(0,+\infty)$ - вогнута. При $x = 0$ имеем точку перегиба; ее ордината $y = 0 - 12 * 0 + 4 = 4$ (рис. 14).



6) Построим график функции



Вопросы самоконтроля:

1. Какая функция называется возрастающей (убывающей)
2.Перечислите основные пункты исследования и построения графика функции.

Интегрирование

Определение. Если функция F(x) – первообразная для функции f(x), то множество функций F(x)+C, где C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

при этом функция f(x) называется подынтегральной функцией, f(x)dx – подынтегральным выражением, а переменная x – переменной интегрирования.

Основные свойства неопределенного интеграла.

1.$(f(x)dx)' = f(x)$

2.$d\int f(x)dx = f(x)dx$ 3.$\int dF(x) = F(x) + C$

4.$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

5.$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Таблица основных интегралов

$$1.\int 0dx = C$$

$$2.\int dx = x + C$$

$$3.\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq 1)$$

$$4.\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$5.\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C(0 < a \neq 1)$$

$$6.\int e^x dx = e^x + C$$

$$7.\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$8.\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$9.\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$10.\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$11.\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$12.\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$$

ПРИМЕР 20. Найти следующие интегралы **а)** $\int 6x^2 dx$

Решение. Используя свойства и формулы интегрирования, получим

$$\int 6x^2 dx = 6\int x^2 dx = 6 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = 2x^3 + C.$$

Проверка: $d(2x^3+C)=6x^2dx$. Получили подынтегральное выражение; следовательно, интеграл найден правильно.

б) $\int 4(x^2 - x + 3)dx$

Решение. Используя свойства 3^0 и 4^0 и формулы таблицы интегралов, имеем

$$\int 4(x^2 - x + 3)dx = 4\int x^2 dx - 4\int x dx + 12\int dx = 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 12x + C = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C.$$

Постоянная интегрирования С равна алгебраической сумме трех постоянных интегрирования, так как каждый интеграл имеет свою произвольную постоянную

($C_1+C_2+C_3=C$).

Вопросы самоконтроля:

1. Дать определение неопределенного интеграла.
2. Что называется первообразной функции?
3. Перечислите основные свойства интегралов.

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

ПРИМЕР 21. Вычислить интеграл $\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}\right)dx$

Решение. Применив свойства 4 и 5, имеем

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}\right)dx=5\int cosxdx+2\int dx-3\int x^2dx+\int\frac{dx}{x}$$

Далее, используя формулы таблицы основных интегралов, находим каждый интеграл полученной алгебраической суммы:

$$5\int cosxdx=5(\sin x+C_1)=5\sin x+5C_1$$

$$2\int dx=2x+2C_2$$

$$3\int x^2dx=3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}+C_3\right)=x^3+3C_3$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C_4$$

Таким образом, имеем

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}\right)dx=5\sin x+2x-x^3+\ln x+C$$

2. Метод подстановки

ПРИМЕР 22. Вычислить интеграл $\int\cos 3xdx$.

Решение. Интеграл не табличный. Применим подстановку t = 3x, тогда $dt=(3x)'dx=3dx, dx=1/3dt$. Подставив в интеграл получаем: $\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}\int\cos tdt.$

- табличный интеграл. Применяя формулу таблицы основных интегралов, находим $\frac{1}{3}\int\cos tdt=\frac{1}{3}\sin t+C$. Возвращаясь к переменной x, окончательно получаем $\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}\sin 3x+C.$

3. Интегрирование по частям: Используем формулу $\int udv=uv-\int vdu$

ПРИМЕР 23. Найти следующие интегралы:

а) $\int x\sin xdx$

Решение. Положим u=x, *dv=sinxdx;* тогда *du=dx,* $\int dv = \int \sin x dx,$ т.е. *v=-cosx*.

Используя формулу (11.14), получим

$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$.

б) $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$

Решение. Положим u=lnx, $dv = \frac{dx}{x^2}$; тогда $du = \frac{dx}{x}$, $\int dv = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x}$; $v = -\frac{1}{x}$.

По формуле (11.14) получим $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x} \frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$

Вопросы и задания для самопроверки:

1. Объяснить в чем заключается метод замены переменной.
2. Напишите формулу интегрирования по частям.
3. Вычислите интеграл.

Определенный интеграл

Определение. Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю.

Для вычисления определенного интеграла служит формула Ньютона – Лейбница, где определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ - формула Ньютона – Лейбница

ПРИМЕР 24. Вычислить интегралы

а) $\int_a^b \sin x dx$

Решение. Так как одной из первообразных для функции f(x) = sin x является функция F(x) = -cos x, то применяя формулу Ньютона – Лейбница, получаем

а) $\int_a^b \sin x dx = -\cos\Big|_a^b = \cos a - \cos b$ б) $\int_{-1}^{2} (x^2 + 2x + 1) dx$.

Решение. По формуле Ньютона – Лейбница получаем.

$$\int_{-1}^{2}(x^2+2x+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{2}=\left[\frac{1}{3}\cdot 2^3+2^2+2\right]-\left[\frac{1}{3}(-1)^3+(-1)^2+(-1)\right]=9.$$

в) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$

Решение. Воспользуемся методом подстановки

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx=\begin{bmatrix} x^2=t \\ x^4=t^2 \\ 2xdx=dt \\ xdx=\dfrac{di}{2} \\ t_н=0 \\ t_в=1 \end{bmatrix}=\int_0^1 \frac{dt/2}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(arctgt\Big|_0^1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(arctg1-arctg0\right)=\frac{\pi}{8}$$

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Дайте определение определенного интеграла.
2. Как выглядит формула Ньютона – Лейбница.
3. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/4}\cos 2xdx$.

Приложения определенного интеграла.

Определение. Если криволинейная трапеция, ограничена кривой $y=f(x)$, осью Ох и прямыми x = a и x = b, лежит под осью Ох, то формула для нахождения площади плоской фигуры $S=\int_a^b f(x)dx$

Рассмотрим геометрический смысл интеграла на конкретном примере.

ПРИМЕР 25.

а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

y = -6x, y = 0 и x = 4.

Решение. Фигура расположена под осью Ох, следовательно ее площадь находим по формуле: $S = \left| -\int_0^4 6x \right| = \left| \left[-3x^2 \right]_0^4 \right| = \left| -48 \right| = 48 (кв.ед.)$

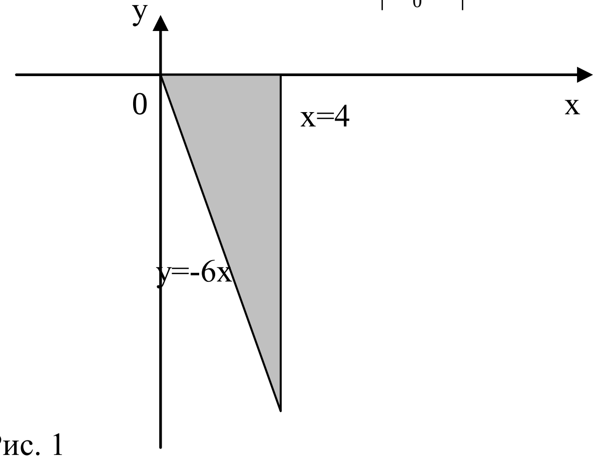


Рис. 1

б) **Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:** y=-**x**^{2}**+4 и y=0.**

Решение. Выполним построение фигуры рисунок 2. Искомая площадь заключена между параболой y=-x^2+4 и осью Ох. Найдем точки пересечения параболы с осью Ох. Полагая y=0, найдем x=± 2. Так как данная фигура симметрична относительно оси Оу, то вычислим площадь фигуры, расположенной справа от оси Оу, и полученный результат удвоим:

$$S_1 = \int_0^2 (-x^2 + 4)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^2 = 5\frac{1}{3} (кв.ед.);$$

$$S = 2S_1 = 2 \cdot 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3} (кв.ед.).$$

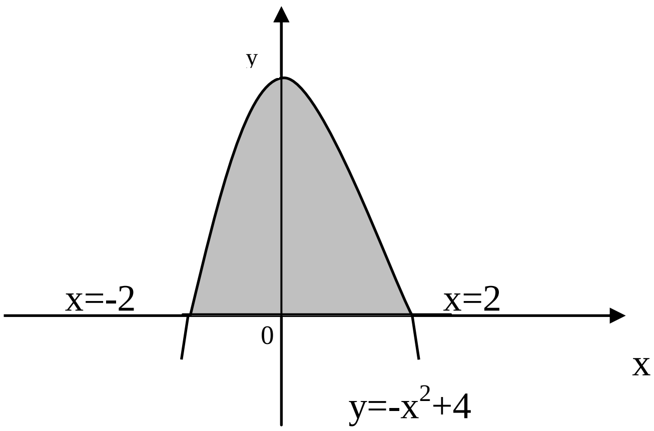


Рис.2

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Определение производной функции
2. В чем заключается геометрический смысл производной?

3. В чем заключается физический смысл производной?
4. Как найти производную сложной функции.
5. Как найти производную второго и третьего порядка.
6. Перечислите основные формулы дифференцирования.
7. Какая функция называется возрастающей?
8. Какая функция называется убывающей?
9. Какие функции называются монотонными?
10. Перечислите основные пункты исследования и построения графика функции.
11. Дать определение неопределенного интеграла.
12. Что называется первообразной функции?
13. Перечислите основные свойства интегралов.
14. Объяснить в чем заключается метод замены переменной.
15. Напишите формулу интегрирования по частям.
16. Вычислите интеграл
17. Дайте определение определенного интеграла.
18. Как выглядит формула Ньютона – Лейбница.
19. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/4} \cos 2x dx$
20. Запишите формулу нахождения площади плоской фигуры
21. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x=3$.

3. Требования к выполнению и оформлению домашней контрольной работы по математике

Контрольная работа оформляется в тонкой тетради чернилами любого цвета (кроме красного). Для замечаний рецензента оставляются поля. На обложке тетради указываются: фамилия, имя, отчество студента, его учебный шифр (серия и номер зачетной книжки), домашний адрес, а также наименование дисциплины и номер контрольной работы (см. приложение 1)

Решения задач следует располагать в порядке следования номеров, указанных в задании, сохраняя номера задач и записывая исходные условия.

Приступая к выполнению контрольной работы, необходимо изучить теоретический материал и ознакомиться с решением типовых задач. Решения задач контрольной работы следует оформлять аккуратно, подробно объясняя ход решения, записывать используемые формулы. В конце работы необходимо привести список использованной литературы, указать дату выполнения работы и поставить свою подпись.

После получения проверенной работы необходимо исправить в ней отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. Работа над ошибками, как правило, делается в той же тетради, что и контрольная работа.

4. Варианты заданий домашней контрольной работы

Выбор задач для контрольной работы осуществляется в соответствии с вариантом, номер которого совпадает с последней цифрой учебного шрифта студента.

Варианты заданий

Вариант	Номера задач, входящих в контрольную работу					
1	1	11	21	31	41	51
2	2	12	22	32	42	52
3	3	13	23	33	43	53
4	4	14	24	34	44	54
5	5	15	25	35	45	55
6	6	16	26	36	46	56
7	7	17	27	37	47	57
8	8	18	28	38	48	58
9	9	19	29	39	49	59
10	10	20	30	40	50	60

Задание №1. Решить системы уравнения: а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера; в) методом Гаусса

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 + 6 = 0, \\ x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$	7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0. \end{cases}$	8. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2x_1+x_2+6=0, \\ x_1-2x_2-x_3=5, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=13. \end{cases}$	9. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5, \\ 3x_1+3x_2-2x_3=8, \\ x_1+x_2+x_3=6. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-x_3=4, \\ 3x_1+x_2-4x_3=0. \end{cases}$	10. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6. \end{cases}$

Задание №2. Вычислить пределы следующих функций:

1. $a)\lim\limits_{x\to 2}(5x^3-6x^2+x-5)$ $b)\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$	6. $a)\lim\limits_{x\to 3}(x^3-x^2+1)$ $b)\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$
2. $a)\lim\limits_{x\to 3}(x^3+x-5)$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}$	7. $a)\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)(x-3)(x-5)$ $b)\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$
3. $a)\lim\limits_{x\to 3}(x^3-x^2+1)$ $b)\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$	8. $a)\lim\limits_{x\to 3}(x^3+x-5)$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}$
4. $a)\lim\limits_{x\to -1}(2x^3-5x^2+x-4)$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x-2}$	9. $a)\lim\limits_{x\to -1}(2x^3-5x^2+x-4)$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x-2}$
5. $a)\lim\limits_{x\to 3}(x^3-x^2+1)$ $b)\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$	10. $a)\lim\limits_{x\to 3}(x^3+x-5)$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}$

Задание №3. Найти производные следующих функций:

1. а) $y=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}+4$, б) $y=\frac{x*tgx}{1+x^2}$.	6. а) $y=3\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}-5ctgx$, б) $y=\frac{2x*tgx}{1+x^2}$

2. а) $y=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}+7x$, б) $y=\frac{2x*tgx}{1+x^2}$	7. а) $y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}+\frac{2x}{x^2}-7\sin x$, б) $y=\frac{6-x}{5+x^2}$
3. а) $y=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}+7\cos x$, б) $y=\frac{2x}{1+x^2}$	8. а) $y=\frac{8}{\sqrt[4]{x}}-3\log_2 x-4\sin x$, б) $y=\frac{6-x^2}{5-2x}$
4. а) $y=\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x}+7$, б) $y=\frac{2x\sqrt{x}}{1+x^2}$	9. а) $y=\frac{6}{\sqrt[3]{x}}-3\log_3 x-\arcsin x$, б) $y=\frac{6-x^2}{2x-3}$
5. а) $y=\sqrt[8]{x}-4\cos x-\frac{3}{x}+\ln x$, б) $y=\frac{2-x^2}{1+x^2}$	10. а) $y=\frac{16}{\sqrt[4]{x}}-5\log_5 x-5e^x$, б) $y=\frac{3-2x^2}{2x-5}$.

Задание №4. Найдите производную сложной функции:

1. а) $y=\sqrt{1+x^4}$ б) $y=\arcsin x^2$	6. а) $y=\left(7x^3-3\right)^6$ б) $y=arctg\frac{x}{2}$
2. а) $y=\sqrt{x^3-5}$ б) $y=\arcsin 3x^2$	7. а) $y=\left(2\ -3x^4\right)^8$ в) $y=\arcsin\frac{x}{2}$
3. а) $y=\sqrt{2x^3-5}$ б) $y=\arccos x^2$	8. а) $y=\sqrt[4]{(3x^3+2)^3}$ б) $y=\arcsin\sqrt{x}$

4. а) $y=\sqrt[4]{5x^3+2}$ б) $y=\arccos 5x^2$	9. а) $y=\sqrt[5]{5x^3+2}$ б) $y=arctg\sqrt{x}$
5) а) $y=\left(2x^3-3\right)^8$ б) $y=arctg\dfrac{1}{x}$	10. а) $y=\left(2x\ -5x^4\right)^5$ б) $y=\arcsin 3x$

Задание №5. Исследовать и поострить график функции:

1. $y=x^3-3x^2+4$	6. $y=\dfrac{4x^3-x^4}{5}$
2. $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2$	7. $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3-x^2$
3. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$	8. $y=\dfrac{1}{x^2-7x+12}$
4. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$	9. $y=\dfrac{(x+1)(x+8)}{x}$
5. $y=1-\dfrac{5}{2}x^2-x^5$	10. $y=4x^2-x^4-3$

Задание № 6. Вычислить неопределенный интегралы:

1. $a)\int(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}})dx$ $b)\int x^3 e^{-x}dx$	6. $a)\int(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx$ $b)\int\cos 5xdx$
2. $a)\int(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{x^2+3})dx$ $b)\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$	7. $a)\int e^x(2-\frac{e^{-x}}{x^3})dx$ $b)\int xarctgxdx$
3. $a)\int(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{x^2+3})dx$ $b)\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$	8. $a)\int(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2dx$ $b)\int e^{2x}dx$
4. $a)\int\sin^2\frac{x}{2}dx$ $b)\int\frac{x^4}{x^5+7}dx$	9. $a)\int(\frac{2}{x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx$ $b)\int\cos 5xdx$
5. $a)\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$ $b)\int\frac{e^{4x}}{e^x-1}dx$	10. $a)\int(\frac{x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}})dx$ $b)\int x^2e^{-x}dx$

Задание № 7. Вычислить определенный интеграл:

1. $\int_0^1(2x^2-7x+5)dx$	6. $\int_0^1(-x^2+9x+3)dx$
2. $\int_0^1(-4x^2+2x-10)dx$	7. $\int_0^1(3x^2-8x-10)dx$
3. $\int_0^1(-4x^2-3x+5)dx$	8. $\int_0^1(-3x^2-4x-10)dx$
4. $\int_0^1(x^2-3x+5)dx$	9. $\int_0^1(-3x^2-2x-1)dx$

5. $\int_0^1 (x^2 - 7x + 8)dx$	10. $\int_0^1 (-x^2 - 2x + 9)dx$

5. Литература

1. ЭБС «Znanium.com» Дадаян, А.А. Математика.: учебник / А.А. Дадаян. - М.: Форум, 2013. - 544 с. - Режим доступа: http://znanium.com/

2. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. - М.: Российский государственный университет правосудия, 2015. - 342 с. - ЭБС «IPRbooks» - Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.html

3. Башмаков, М.И. Математика: учебник / М.И. Башмаков. – М.: Академия, 2015. – 256 с.

4. Башмаков, М.И. Математика. Задачник: учебное пособие / М.И. Башмаков. – М.: Академия, 2014. – 416 с.