

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
политехнический колледж филиала федерального
государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Майкопский государственный технологический
университет» в п. Яблоновском

Методические рекомендации по выполнению
практических работ по дисциплине
ПД.01 Математика

Раздел: Тригонометрические функции.

форма обучения- очная

Яблоновский, 2017

УДК 51 (07)

ББК 22.1

Ш.26

Рассмотрено на заседании цикловой комиссии
информационных и математических дисциплин

Протокол № 1 от «31» августа 2020

Председатель _____ А.А. Схаплок

Авторы: Р.Я. Шартан – преподаватель колледжа филиала
МГТУ в п. Яблоновском

Методические указания по выполнению практических работ составлены в помощь студентам. Дисциплина «Математика» входит в обязательную часть математического и общего естественно - научного цикла, изучается специальностями 38.02.02 Страхование (по отраслям), 38.02.07 Банковское дело, 43.02.15 Поварское и кондитерское дело, 09.02.03 Программирование в компьютерных системах.

Основная задача обучения математике – обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества для изучения смежных дисциплин.

Программой предусмотрено дальнейшее вооружение студентов математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения специальных дисциплин, разработки курсовых и дипломных проектов, для профессиональной деятельности и продолжения образования.

Задачами данного курса являются:

- усвоение основ математических знаний (теорем, определений, формул);
- формирование умений, навыков студентов на основе полученных знаний;
- развитие интереса студентов к предмету и стимулирование их познавательной активности.

Основными идеями, проходящими весь курс, являются:

- приобретение ряда общих умений необходимых для успешного усвоения математики;
- использование математических знаний при изучении общетехнических и специальных дисциплин, в курсовом и дипломном проектировании.

Особое значение для развития математического мышления студентов имеют практические упражнения, во время которых студент должен уметь:

- проводить сложные и несложные дедуктивные рассуждения;
- обосновывать с разумной степенью полноты решения задач и письменно оформлять их;
- формулировать на математическом языке несложные задачи прикладного характера и интерпретировать полученные результаты;
- пользоваться электронно-вычислительной техникой при решении математических задач;
- пользоваться справочной литературой.

Радиианное измерение дуги и угла. Обобщение понятия дуги (угла.)

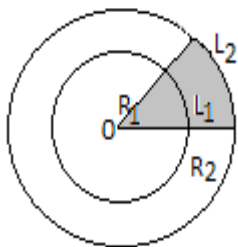
1. Радиианное измерение дуги и угла

Известна градусная мера измерения углов и дуг: $1^\circ = \frac{1}{360}$ части длины окружности,

$$1^\circ = 60', 1' = 60''$$

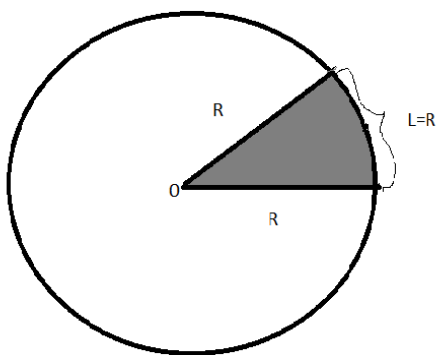
В дальнейшем будем применять еще одну единицу измерения дуг и углов - **радиан**.

Длины дуг L_1 и L_2 двух концентрических окружностей, соответствующих одному и тому же центральному углу, пропорциональны их радиусам R_1 и R_2 .



$\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}$, при одном и том же центральном угле отношение длины дуги окружности к ее радиусу не зависит от длины радиуса.

Отношение длины дуги окружности L к длине ее радиуса R называется радианной мерой a этой дуги: $a = \frac{L}{R}$.



При радиане измерении дуг за единицу измерения принимается центральный угол, опирающийся на дугу в один радиан. Такой угол также называется **радианом**.

$$\text{Из } a = \frac{L}{R} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{R} = 2\pi.$$

2.Формула перехода от градусного измерения к радианному. Пусть дуге в α градусов соответствует дуга, равная a радиан, тогда из пропорции $\frac{180^\circ}{\alpha} = \frac{\pi}{a}$ получим формула перехода от градусного измерения к радианному

$$\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha.$$

Пример: Найти радианную меру дуги, равной 210° .

Решение. По формуле $\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$, получаем $\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 210^\circ = \frac{7\pi}{6}$

1.Выразите в радианной мере величины углов:

а) $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ;$ $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$

б) $90^\circ, 120^\circ, 135^\circ;$ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$

в) $150^\circ, 75^\circ, 180^\circ;$ $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \pi\right)$

г) $210^\circ, 225^\circ, 270^\circ;$ $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$

д) $300^\circ, 360^\circ, 7200^\circ.$ $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi, 40\pi\right).$

3.Формула перехода от радианного измерения к градусному. Из формулы $\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$ выражая дугу или угол α через a

получаем формулу перехода от радианного измерения к градусному

$$\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot a$$

Пример: Найти градусную меру угла, равного $\frac{7\pi}{4}$

Решение. По формуле $\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot a$ получим $\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{7\pi}{4} = 315^\circ$

2. Выразите в градусной мере величины углов:

а) $\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \pi$ ($60^\circ, -90^\circ, 180^\circ$)

б) $-\frac{2\pi}{3}, 4, -3\pi$ ($-120^\circ, 135^\circ, -540^\circ$)

в) $\frac{\pi}{18}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{36}$ ($10^\circ, -150^\circ, 5^\circ$)

4. Длина дуги окружности. По формуле $a = \frac{L}{R}$ находим $L = a \cdot R$

Длина дуги окружности равна радианной мере дуги, умноженной на радиус этой дуги.

Пример: Колесо радиуса $R=0,35$ м повернулась на угол $\alpha = 72^\circ 36'$. Найти длину пути, пройденного точкой на ободе колеса.

Решение. Так как значение радиуса колеса дано с двумя значащими цифрами, по таблице Брадиса находим радианную меру $72^\circ 36'$, равную 1,27, с тремя значащими цифрами.

$$L = a \cdot R = 0,35 \cdot 1,27 \approx 0,443 \approx 0,44(\text{м}).$$

5. Площадь углового сектора. Если центральный угол измеряется градусной мерой, то площадь сектора определяется выражением:

$$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} a = \frac{1}{2} R^2 a.$$

Пример. Вычислить площадь сектора круга радиуса 0,76м, если радианная мера дуги сектора равна 1,12рад.

Решение. По формуле $S_{\text{сект.}} = \frac{1}{2} R^2 a$, находим

$$S_{\text{сект.}} = \frac{1,12}{2} \cdot 0,76^2 \approx 0,56 \cdot 0,578 \approx 0,324 \approx 0,32(\text{м}^2)$$

6. Линейная скорость при вращении движения. Скорость любой точки твердого тела во вращательном движении называется

линейной скоростью.

Линейная скорость v при равномерном движении точки по окружности радиуса R выражается формулой $v = \frac{2\pi R}{T}$, где T - период вращения, т.е. время (в с), за которое совершается полный оборот точки.

Зависимость линейной скорости v от радиуса R и числа оборотов n , совершаемых точкой в 1 с, выражается формулой $v = 2\pi Rn$.

Число оборотов n и период вращения T связаны соотношением $T = \frac{1}{n}$.

Пример. Найти период вращения точки колеса, находящейся на расстоянии 0,61 м от центра и вращающейся равномерно с линейной скоростью $v = 5,8$ м/с.

Решение. Из $v = \frac{2\pi R}{T}$ следует $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot 0,61}{5,8} = 0,65$ (с).

7. Угловая скорость при вращательном движении. Угол, на который поворачивается радиус любой точки равномерно вращающегося твердого тела за 1 с, называется **угловой скоростью**. Угловая скорость выражается в рад/с.

Угловая скорость ω и период вращения T связаны формулой $\omega = \frac{2\pi}{T}$ рад/с.

Через число оборотов в секунду n угловая скорость ω выражается как $\omega = 2\pi n$.

Линейная скорость v точки, находящийся на расстоянии R от оси вращения, и ее угловая скорость ω связаны соотношением $v = \omega R$.

Пример. Найти угловую скорость и период вращения равномерно вращающегося вала, делающего 540 оборотов в минуту.

Решение. Число оборотов в секунду составляет $n = 540/60 = 9$. Подставляя это значение в $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 9 = 18\pi$ рад/с

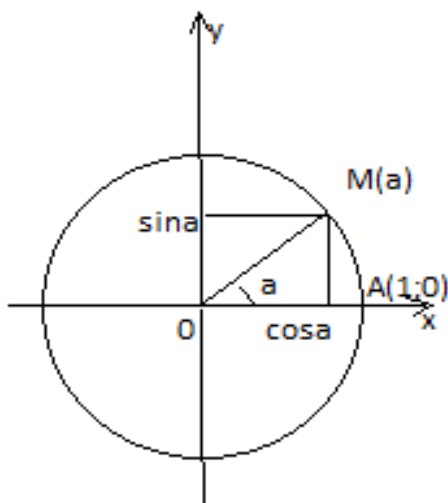
По $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ (с).

Пример. Найти угловую скорость равномерно вращающегося колеса с радиусом 0,81 м, если линейная скорость точки на его окружности равна 324 м/с.

Решение. По формуле $v = \omega R$ получаем $\omega = \frac{v}{R} =$

$$\frac{324}{0,81}=400(\text{рад/с})$$

Тригонометрические функции числового аргумента. Знаки, числовые значения и свойства четности и нечетности тригонометрических функций.



Каждому действительному числу соответствует единственная точка $M(\alpha)$ на числовой единичной окружности, и каждая точка $M(\alpha)$ этой окружности однозначно определена ее абсциссой и ординатой, т.е. абсцисса и ордината являются функциями числа α : $x=f(\alpha)$, $y=g(\alpha)$, причем абсцисса и ордината по абсолютной величине не превышают единицы ($|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$).

Абсцисса x точки $M(\alpha)$ числовой единичной окружности называется косинусом числа α : $\cos \alpha = x$

Ордината y точки $M(\alpha)$ числовой единичной окружности называется синусом числа α : $\sin \alpha = y$.

Отношение синусом числа α к его косинусу называется

тангенсом числа α

$$tg\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Отношение косинуса числа α к его синусу называется котангенсом числа α

$$ctg\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Знаки тригонометрических функций по четвертям.

	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 1 четверть	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 2 четверть	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ 3 четверть	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 4 четверть
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$tg \alpha$	+	-	+	-
$ctg \alpha$	+	-	+	-

Четность и нечетность тригонометрических функций.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$tg(-\alpha) = -tg \alpha$$

$$ctg(-\alpha) = -ctg \alpha$$

Основные тригонометрические тождества.

Если две тригонометрические функции одних и тех же аргументов имеют одну и ту же область определения и принимают равные значения при всех действительных значениях аргументов, то они называются **тождественно равными**. Равенство, справедливое при всех допустимых значениях аргументов, называется **тождеством**.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ - основное тригонометрическое тождество.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

Зависимость между $tg \alpha$ и $ctg \alpha$.

По определению $tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ и $ctg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ перемножив эти выражения, получим: $tg \alpha \cdot ctg \alpha = 1$, $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Из этой формулы следует

$$tg \alpha = \frac{1}{ctg \alpha}; \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z.$$

$$ctg \alpha = \frac{1}{tg \alpha}; \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z.$$

Зависимость между $tg \alpha$ и $\cos \alpha$.

Разделив обе части уравнения основного тригонометрического тождества

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ на $\cos^2 \alpha$ получим:

$$1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Зависимость между $ctg \alpha$ и $\sin \alpha$.

Разделив обе части уравнения основного тригонометрического тождества

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ на $\sin^2 \alpha$ получим:

$$1 + ctg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k, \quad k \in Z.$$

Доказательство тригонометрических тождеств.

При доказательстве тригонометрических тождеств возможно использование следующих приемов: преобразование обеих частей тождества к одному и тому же выражению; преобразование левой части к правой; преобразование правой части к левой; доказательство обстоятельства, что разность между правой и левой частями равна нулю.

Пример: Доказать тождество $\frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha}$

1 способ: (по пропорции) $(1-\cos \alpha)(1+\cos \alpha) = \sin \alpha \sin \alpha$.

$$1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha.$$

2 способ: (умножаем и числитель и знаменатель первой дроби на $(1+\cos \alpha)$)

$$\frac{(1-\cos \alpha)(1+\cos \alpha)}{\sin \alpha(1+\cos \alpha)} = \frac{1-\cos^2 \alpha}{\sin \alpha(1+\cos \alpha)} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha(1+\cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha} \quad \text{ч.т.д}$$

Упражнения

1. Упростить выражения

- а) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha$;
- б) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha (\cos^2 \alpha + 1)$;
- в) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2$;
- г) $\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$;
- д) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.

Вычислить: $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} - 2 \sin \frac{\pi}{3} + \sin \pi + 4 \cos \frac{3\pi}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{3}$;

Решение: $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} - 2 \sin \frac{\pi}{3} + \sin \pi + 4 \cos \frac{3\pi}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{3} =$
 $(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} - 2 \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + 4 \cdot 0 = 3 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 - 2 = 0.$

Упражнения.

2. Вычислить:

- а) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg} \pi - \sin \frac{3\pi}{2} - \cos(-\frac{\pi}{2}) + \sin \pi$;
- б) $\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2} + \cos \pi - \operatorname{tg} 0 + \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2}$;
- в) $2 \sin \frac{\pi}{3} + 2 \cos \frac{\pi}{4} - 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}$;
- г) $\sin^2 \frac{\pi}{4} - 2 \cos^2 \frac{\pi}{3} - 5 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}$;
- д) $5 + \operatorname{ctg}^4 \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}$;

$$\begin{aligned} \text{е)} & (2a \sin(\frac{\pi}{6}))^3 - (\text{btg}(\frac{\pi}{4}))^3 - \left(2abc \cos(\frac{\pi}{2})\right)^2; \\ \text{ж)} & \sin(-\frac{\pi}{6}) - 2\text{tg}(-\frac{\pi}{4}) + \cos(-\frac{\pi}{3}) - \text{ctg}(-\frac{\pi}{2}); \\ \text{з)} & \cos^3(-\frac{\pi}{6}) - \text{tg}(-\frac{\pi}{4}) + \cos(-\frac{\pi}{3}) - \cos(-\frac{\pi}{3}); \\ \text{и)} & \cos^3(-\frac{\pi}{3}) - \text{ctg}^3(-\frac{\pi}{6}) + \sin^3(-\frac{\pi}{6}). \end{aligned}$$

2. Вычислить:

а) $f(\frac{\pi}{6})$; $f(0)$; $f(\frac{\pi}{3})$; $f(\pi)$ для функции $f(x) = 4\sin 3x + 5\cos 3x - 2\sin x$;

б) $f(\frac{\pi}{6})$ для функции $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$;

в) $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta)}$; где $\alpha =$, $\beta = \frac{\pi}{6}$.

Выражение тригонометрических функций через другие тригонометрические функции.

1. Выражение тригонометрических функций через синус:

Из основного тригонометрического тождества $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

\pm ставится в зависимости от того, какой четверти принадлежит аргумент α .

$$\text{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{ctg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} \quad \alpha \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 1:

Вычислить

значение

$\cos \alpha$; $\text{tg} \alpha$; $\text{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ т.к. $\alpha \in 3$ четверти, то

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} \\ &= -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

2. Выражение тригонометрических функций через косинус:

Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

\pm ставится в зависимости от того, какой четверти принадлежит аргумент α .

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \quad \alpha \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Пример 2: Вычислить значение $\sin\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$,

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

Решение: $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

3. Выражение тригонометрических функций через тангенс:

Из тождества $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

По формуле $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, получаем

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} k, k \in Z.$$

Пример 3. Вычислить значение $\sin\alpha$; $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если

$$\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3},$$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ - 2 четверть

Решение:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\pm\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}} = -\frac{1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$$

4. Выражение тригонометрических функций через котангенс:

Из тождества $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\alpha \neq \pi k, k \in Z$ получим

$$\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}}, \quad \alpha \neq \pi k, k \in Z$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}, \quad \alpha \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4. Вычислить значение $\sin \alpha$; $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \frac{3}{3}}} = \frac{1}{\pm \sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\pm \sqrt{1 + \frac{3}{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\pm \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Выражения одних тригонометрических функций через другие

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$	$\operatorname{ctg} \alpha$

3. Вычислить:

$$1) \cos \alpha; \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha, \quad \text{если } \sin \alpha = -\frac{5}{13} \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

$$2) \sin \alpha; \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha, \quad \text{если } \cos \alpha = -\frac{8}{17} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$3) \sin \alpha; \cos \alpha, \operatorname{ctg} \alpha, \quad \text{если } \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15} \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

$$4) \cos \alpha; \sin \alpha; \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{если } \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{7}{24} \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

Периодичность тригонометрических функций.

Функция $f(\alpha)$ называется периодической, если существует положительное число $\lambda \neq 0$, называемое периодом такое, что равенство $f(\alpha \pm \lambda) = f(\alpha)$ удовлетворяется при любом допустимом значении аргумента α .

Свойство периодичности тригонометрических функций при $k \in \mathbb{Z}$ выражается тождествами:

$$\cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi k),$$

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi k),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi),$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi k).$$

Пример 1. Вычислить $2\cos(4,5\pi) + \sin(\frac{19\pi}{3})$:

Решение:

$$\begin{aligned} 2\cos(4,5\pi) + \sin(\frac{19\pi}{3}) &= 2\cos(2\pi \cdot 2 + 0,5\pi) + \sin(2\pi \cdot 3 + \frac{\pi}{3}) = 2\cos 0,5\pi + \\ &+ \sin \frac{\pi}{3} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти период функции:

1) $y = \cos \frac{x}{2}$.

Решение: Обозначим искомый период λ

$$\cos \frac{x+\lambda}{2} = \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) = \cos \frac{x}{2}$$

$$\frac{\lambda}{2} = 2\pi$$

$$\lambda = 4\pi.$$

2) $y = \sin 2x + \cos 3x$

$$\sin 2(x + \lambda_1) = \sin 2x$$

$$2\lambda_1 = 2\pi$$

$$\lambda_1 = \pi$$

$$\cos 3(x + \lambda_2) = \cos 3x$$

$$3\lambda_2 = 2\pi$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

Каждое число, кратное периоду, само является периодом, поэтому общее кратное чисел λ_1 и λ_2 является периодом функции y . Наименьшее общее кратное число π и $\frac{2\pi}{3}$, равное наименьшему общему кратному числителей периодов λ_1 и λ_2 составляет 2π .

3) $y = \sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{2x}{3}$

$$\text{Имеем } \sin \left(\frac{3x}{2} + \frac{3\lambda_1}{2} \right) = \sin \frac{2x}{3}$$

$$\frac{3\lambda_1}{2} = \frac{2x}{3}$$

$$\lambda_1 = \frac{4x}{3}$$

$$\sin \frac{2(x+\lambda_2)}{3} = \sin \frac{2x}{3}$$

$$\frac{2\lambda_2}{3} = 2\pi$$

$$\lambda_2 = 3\pi$$

Наименьшее общее кратное числителей периодов λ_1 и λ_2 равно 12π , следовательно, период функции y равен 12π .

Формулы приведения.

Формулы приведения позволяют привести тригонометрические функции $\frac{\pi k}{2} + \alpha, k \in Z$ к тригонометрическим функциям угла α .

Формулы приведения для тригонометрических функций.

В таблице приведены формулы приведения для тригонометрических функций

($\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$)

Функция/ угол в рад.	$\pi/2 - \alpha$	$\pi/2 + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$3\pi/2 - \alpha$	$3\pi/2 + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
sin	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
tg	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
ctg	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
Функция / угол в °	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$	$360^\circ + \alpha$

Пример1. Вычислить:

а) $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

б) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

в) $\cos 150^\circ = \cos(90^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

г) $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{д) } \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg} (90^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\text{е) } \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}.$$

4. Вычислить:

- 1) $\sin 135^\circ$
- 2) $\cos 240^\circ$
- 3) $\operatorname{tg} 330^\circ$

5. Вычислить:

- 1) $\sin 9135^\circ + \cos (-585^\circ) + \operatorname{tg} 1395^\circ + \operatorname{ctg} (-630^\circ)$;
- 2) $\sin \left(-\frac{13\pi}{6}\right) + \cos \frac{17\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{22\pi}{3} - \operatorname{ctg} \frac{37\pi}{4}$;
- 3) $\sin \left(-\frac{47\pi}{3}\right) - \operatorname{tg} \frac{21\pi}{4} + \operatorname{tg} \left(-\frac{23\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg} \frac{19\pi}{6}$;
- 4) $\operatorname{ctg} 225^\circ - \operatorname{ctg} 675^\circ - \cos 495^\circ + \cos 765^\circ$;
- 5) $\sin (-810^\circ) + \cos (-900^\circ) + \operatorname{tg} (-395^\circ) \operatorname{ctg} 575^\circ$

Тригонометрические функции алгебраической суммы двух аргументов (формулы сложения).

Формулы сложения называются формулы, выражающие тригонометрические функции углов $(\alpha \pm \beta)$ через одноименные функции углов α и β .

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1); \beta \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \neq 1$$

$$\operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1); \beta \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \neq 1$$

$$\operatorname{ctg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha} \quad \alpha \neq \pi k, \beta \neq \pi k, \alpha \neq -\beta + \pi k.$$

$$\operatorname{ctg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha} \quad \alpha \neq \pi k, \beta \neq \pi k, \alpha \neq -\beta + \pi k$$

Пример: Найти: $\sin 15^\circ$

Решение:

$$1) \quad \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1).$$

$$2) \quad \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1).$$

$$3) \quad f_1 = \sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ = \sin(70^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$4) \quad f_2 = \cos(\alpha + \beta), \quad \text{если} \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = \frac{4}{5}, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right), \quad \beta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$$

Решение:

$$f_2 = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{4}{5} \quad \sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{12}{25} + \frac{12}{25} = \frac{24}{25}$$

Вычислите 6-7

6. а) $\cos 0,3\pi \sin 0,2\pi + \sin 0,3\pi \cos 0,2\pi$;

б) $\cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{15} \sin \frac{3\pi}{5}$;

в) $\cos 35^\circ \sin 65^\circ - \sin 35^\circ \cos 65^\circ$;

б) $\cos 79^\circ \cos 34^\circ + \sin 79^\circ \sin 34^\circ$.

7. а) $\frac{tg \frac{\pi}{15} + tg \frac{4\pi}{15}}{1 - tg \frac{\pi}{15} tg \frac{4\pi}{15}}$;

б) $\frac{tg \frac{2\pi}{3} - tg \frac{5\pi}{12}}{1 + tg \frac{2\pi}{3} tg \frac{5\pi}{12}}$;

в) $\frac{tg 22^\circ + tg 23^\circ}{1 - tg 22^\circ tg 23^\circ}$;

г) $\frac{tg 72^\circ - tg 42^\circ}{1 + tg 72^\circ tg 42^\circ}$.

8. Вычислить $\cos(\alpha + \beta)$, если

1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$, $(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi)$;

2) $\sin\alpha = \sin\beta = \frac{5}{13}$, $(0 < \alpha < \pi)$, $(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi)$.

9. Вычислить $\sin(\alpha + \beta)$, если

а) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\sin\beta = -\frac{4}{5}$, $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, $(\pi < \beta < \frac{3\pi}{2})$.

б) $\cos\alpha = \cos\beta = -\frac{4}{5}$, $(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$, $(\pi < \beta < \frac{3\pi}{2})$.

10. Упростить выражение:

а) $\sin\alpha\cos3\alpha - \cos\alpha\sin3\alpha$;

б) $\cos4\alpha\cos\alpha + \sin4\alpha\sin\alpha$;

в) $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{6})$;

г) $\sin(\beta + \frac{\pi}{3}) - \sin(\beta - \frac{\pi}{3})$.

Тригонометрические функции удвоенного аргумента.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Пример 1. Доказать тождество:

а) $1 + \sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$

б) $1 - \sin 2\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$

Решение: Воспользовавшись тем, что $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$, и формулой синуса двойного аргумента получим

$$1 + \sin 2\alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2.$$

$$1 - \sin 2\alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2.$$

Пример 2. Сократить дробь: $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

Решение: $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} =$
 $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)}{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.

Пример 3. Вычислить: а) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$; б) $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$.

Решение: а) *Заданное* выражение представляет собой правую часть формулы косинуса двойного аргумента.

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \frac{2\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

б) *Заданное* выражение представляет собой правую часть формулы синуса двойного аргумента, но только не хватает множителя 2. Введя его, получим:

$$\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 0,5(2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}) = 0,5 \sin(2 \cdot \frac{\pi}{12}) = 0,5 \sin \frac{\pi}{6} = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25.$$

Пример 4. Зная, что $\cos x = \frac{3}{5}$ и $x \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$, вычислить: а) $\cos 2x$, б) $\sin 2x$, в) $\operatorname{tg} 2x$.

Решение: а) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, вычислив

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\frac{3}{5})^2 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}.$$

б) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

Значение $\cos x$ дано по условию, а значение $\sin x$ находим из

$$\sin^2 x = \frac{16}{25}$$

$x = \frac{4}{5}$; $x = -\frac{4}{5}$. Так как по условию аргумент принадлежит

четвертой четверти, а в ней синус отрицателен. Это значит $x = -\frac{4}{5}$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} = -\frac{24}{25}$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$$

Упражнения.

11. Вычислить: $\cos 2x$, если $\sin x = -0,3$.

12. Зная, что $\sin x = -\frac{3}{5}$ и $x \in \left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$, вычислить: а) $\cos 2x$, б) $\sin 2x$, в) $\operatorname{tg} 2x$.

13. Зная, что $\cos x = \frac{5}{13}$ и $x \in \left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$, вычислить: а) $\cos 2x$, б) $\sin 2x$, в) $\operatorname{tg} 2x$.

14. Зная, что $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$ и $x \in \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$, вычислить: а) $\cos 2x$, б) $\sin 2x$, в) $\operatorname{tg} 2x$.

15. Зная, что $\operatorname{ctg} x = -\frac{4}{3}$ и $x \in \left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$, вычислить: а) $\cos 2x$, б) $\sin 2x$, в) $\operatorname{tg} 2x$.

16. Выразить:

а) $\cos 3\alpha$ через $\cos \alpha$;

б) $\sin 4\alpha$ через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$;

в) $\cos 4\alpha$ через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$;

г) $\operatorname{ctg} 3\alpha$ через $\operatorname{ctg} \alpha$;

д) $\sin 5\alpha$ через $\sin \alpha$

Тригонометрические функции половинного аргумента.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Пример: Вычислить $\sin \frac{\alpha}{2}$; $\cos \frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ если $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение: Знак + или - выбирается в зависимости от четверти.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}.$$

Упражнения.

17. Вычислить $\sin \frac{\alpha}{2}$; $\cos \frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

18. Вычислить $\sin \frac{\alpha}{2}$; $\cos \frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ если $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

19. Вычислить $\sin \frac{\alpha}{2}$; $\cos \frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Обратные тригонометрические функции.

Опр. Арксинусом числа a называется такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, что его синус равен a .

Пример1. Найти $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, т.к. $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Опр. Арккосинусом числа a называется такое число из отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, что его косинус равен a .

Пример 2. Найти $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение: $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, т.к. $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\pi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Опр. Арктангенсом числа a называется такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

что его тангенс равен a .

Пример 3. Найти $\arctg 1$.

Решение: $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$, т.к. $\tg \frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Опр. Арккотангенсом числа a называется такое число a из интервала $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, что его котангенс равен a .

Пример 4. Найти $\text{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение: $\text{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$, т.к. $\text{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{\pi}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Упражнения.

20. Вычислить:

- а) $\arcsin 0$; б) $\arcsin 1$; в) $\arcsin(-1)$; г) $\arcsin \frac{1}{2}$;
д) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ж) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

21. Вычислить:

- а) $\arccos 0$; б) $\arccos 1$; в) $\arccos(-1)$; г) $\arccos \frac{1}{2}$;

д) $\arccos(-\frac{1}{2})$; е) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

22. Вместо звездочек поставить знак равенства или неравенства, чтобы получить верное соотношение:

а) $\arcsin \frac{1}{2} \cdot \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$. б) $\arcsin(-\frac{1}{2}) \cdot \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 в) $\operatorname{arctg} 1 \cdot \arccos \frac{1}{2}$; г) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) \cdot \arcsin(-\frac{1}{2})$

23. Вычислить:

а) $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2}$; б) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$;
 в) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$; г) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

24. Вычислить:

а) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arctg}(-1)$; б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} 1$;
 в) $\operatorname{arctg}(-1) + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$;
 д) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$.

25. Вычислить:

а) $\arcsin 1 + \arccos 1 + \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1$;
 б) $\arcsin 0 + \arcsin 1 + \arcsin(-1)$;
 в) $\arccos 0 + \arccos 1 + \arccos(-1)$;
 г) $\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}(-1)$;
 д) $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} 0$;
 е) $\arcsin(-\frac{1}{2}) + \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \operatorname{arctg} 0$;
 ж) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg} 1$;
 з) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

26. Вычислить:

а) $\sin(\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \operatorname{arctg} \sqrt{3})$;

$$\text{б) } \operatorname{ctg}(\arccos 1 + 2 \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3}));$$

$$\text{в) } \cos(2 \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{3});$$

$$\text{г) } \sin^2(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \arccos \frac{1}{2}).$$

Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.

Простейшими тригонометрическими уравнениями называется уравнения $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\operatorname{tg} x = m$, $\operatorname{ctg} x = m$, где m - данное число.

Решить простейшие тригонометрические уравнения - значит найти множество всех значений аргумента (дуг или углов), при которых данная тригонометрическая функция принимает заданное значение.

$$\text{1) } \sin x = m$$

$$x = (-1)^k \arcsin m + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

k, n, m - могут принимать любые целые значения, но при этом ради кратности не будем указывать, что $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Если $|m| > 1$, то уравнение не имеет решения.

Частные случаи:

$$\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

$$\sin x = 0 \quad x = \pi k.$$

$$\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Пример 1: Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение: $\sin x = \frac{1}{2}$.

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. $\cos x = m$

$$x = \pm \arccos m + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Если $|m| > 1$, то уравнение не имеет решения.

Частные случаи:

$$\cos x = -1 \quad x = \pm \pi + 2\pi k \quad \text{или} \quad x = \pm \pi(1 + 2k)$$

$$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\cos x = 1 \quad x = 2\pi k.$$

Пример 2. $\cos x = -\frac{1}{2}$

Решение:

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

3. $\operatorname{tg} x = m$

$$x = \operatorname{arctg} m + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Частный случай:

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

Решение:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

4. $\operatorname{ctg} x = m$

$$x = \operatorname{arctg} m + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Частный случай

$$\operatorname{ctg} x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Пример 4.

$$\operatorname{ctg} x = -1$$

$$x = \arctg(-1) + \pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Упражнения.

27. Решите уравнения:

$$a) \sin 2x = \frac{1}{2};$$

$$б) \operatorname{tg}(3x+2) = -1;$$

$$в) \cos(\cos x) = \frac{1}{2}.$$

28. Решите уравнения:

$$a) \sin^2 x = m;$$

$$б) \cos^2 x = m;$$

$$в) \operatorname{tg}^2 x = m;$$

$$г) \operatorname{ctg}^2 x = m.$$

29. Решите уравнение:

$$a) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$б) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$в) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$г) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$д) \cos x = \frac{1}{2};$$

$$е) \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$ж) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$з) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$и) \operatorname{tg} x = \sqrt{3};$$

$$к) \operatorname{tg} x = 1;$$

$$л) \operatorname{ctg} x = 1;$$

$$м) \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}.$$

30. Решите уравнение:

$$a) \sin^2 x = \frac{1}{2};$$

$$б) \sin^2 x = 1;$$

$$в) \cos^2 x = 1;$$

$$г) \cos^2 x = \frac{1}{2};$$

$$д) \operatorname{tg}^2 x = 1;$$

$$е) \operatorname{ctg}^2 x = 3;$$

$$ж) \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}.$$

31. Решите уравнение:

$$a) \cos 2x = 1;$$

$$б) \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2}) = 1;$$

$$в) \operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{2}) = -1.$$

Тригонометрические неравенства.

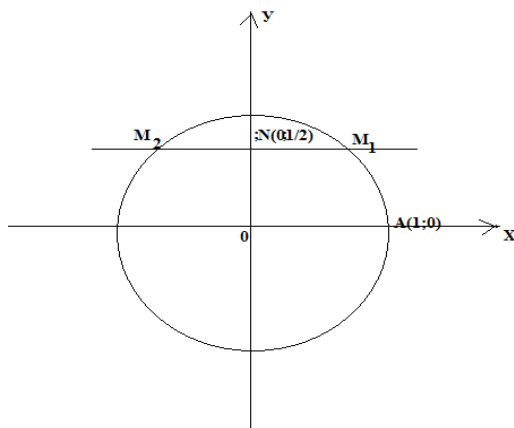
Простейшими тригонометрическим неравенствами называются неравенства вида $\sin x < m$, $\sin x > m$, $\cos x < m$, $\cos x > m$, $\operatorname{tg} x < m$, $\operatorname{tg} x > m$, $\operatorname{ctg} x < m$, $\operatorname{ctg} x > m$, где m - данное число.

Решить простейшее тригонометрическое неравенство — значит найти множество всех значений аргумента (дуг или углов), которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

Пример 1. Решить неравенства: а) $\sin x < \frac{1}{2}$, б) $\sin x > \frac{1}{2}$

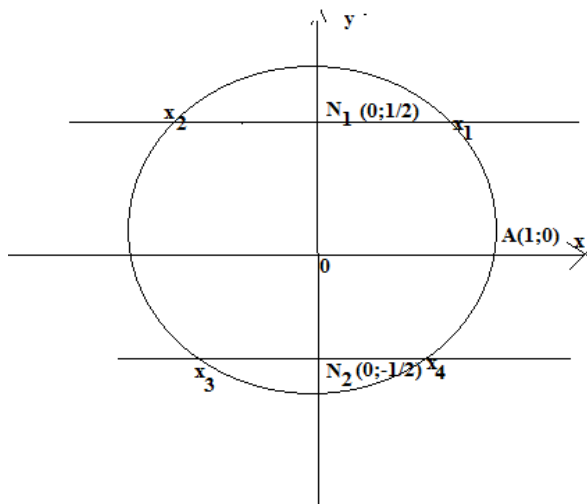
Решение: а) Учитывая свойство ограниченности синуса, данное неравенство можно переписать так:

$$-1 \leq \sin x < \frac{1}{2}. \text{ Имеем } \overline{AM_1} = \frac{\pi}{6}, \overline{AM_2} = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$$



Неравенству $\sin x < \frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка $-\frac{7\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$. В силу периодичности синуса общим решением служит множество дуг вида $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

2) Это неравенство выполняется для всех дуг $x_1 < x < x_2$ и $x_3 < x < x_4$, где $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

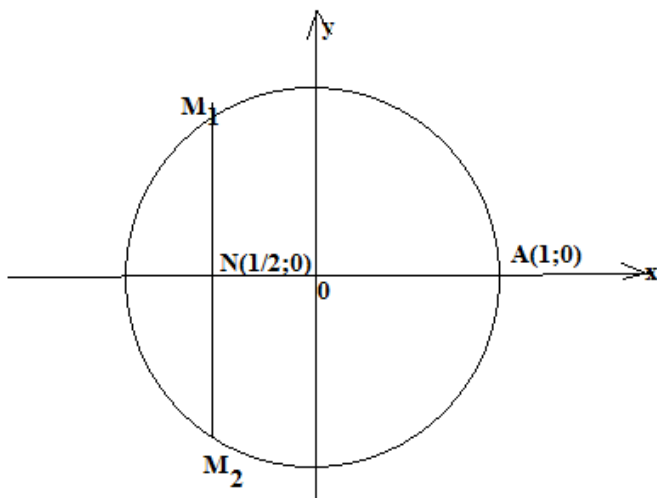


$X_3 = x_1 + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi$ и $X_4 = x_2 + \pi = \frac{5\pi}{6} + \pi$, т.е. для $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6} + \pi < x < \frac{5\pi}{6} + \pi$. Общим решением служит множество дуг $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k$.

Пример 2. Решить неравенство. а) $\cos x > -\frac{1}{2}$, б) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$, в) $\operatorname{ctg} x > 1$

Решение: а) Перепишем данное уравнение так: $-\frac{1}{2} < \cos x \leq -\frac{1}{2}$
 удовлетворяют дуги из промежутка

$$-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$$



Общим решением служит множество дуг вида $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$.

б) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

Учитывая свойство неограниченности тангенса, имеем $\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < +\infty$. Неравенству $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$ удовлетворяют дуги промежутка $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$. В силу периодичности тангенса общим решением служит множество дуг вида $\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Упражнения

Решите неравенства:

32. а) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\sin x \geq 0,055$.

33. а) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos x \leq \frac{1}{2}$

в) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos x \geq 0,7900$.

34. а) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$;
 в) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$; г) $\operatorname{tg} x > 10$
35. а) $\operatorname{ctg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{ctg} x \geq 1$;
 в) $\operatorname{ctg} x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\operatorname{ctg} x < -5$.
36. а) $\sin 2x > \frac{1}{2}$; б) $\cos \frac{3x}{4} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 в) $\operatorname{tg} x \left(-\frac{x}{2}\right) < 1$; г) $\cos 2x \geq -\frac{1}{2}$..

Решение тригонометрических уравнений и систем. (Основные методы решения уравнений)

Пример 1. Решить уравнение:

а) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$,

б) $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$.

Решение:

а) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$, Введем новую переменную

$Z = \sin x$. Тогда уравнение примет вид

$2z^2 - 5z + 2 = 0$, откуда находим: $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$.

значит, $\sin x = 2$ и $\sin x = \frac{1}{2}$.

$\sin x = 2$ не имеет корней.

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z$.

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

б) $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$

Воспользовавшись тем, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде

$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$

$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x - \cos x = 0$

$2\cos^2x - \cos x - 1 = 0$. Введем новую переменную $Z = \cos x$, тогда

$$2z^2 - z + 1 = 0$$

$$z_1 = 1 \quad \text{и} \quad z_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = 1 \quad \text{и} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = 1 \quad x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Однородные тригонометрические уравнения.

Определение. Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = 0$ однородным тригонометрическим уравнением **первой** степени; уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ называется тригонометрическим уравнением **второй** степени.

Если a и b однородного тригонометрического уравнения отличны от нуля то обе части уравнения делим на $\cos x$, получим

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x} \Leftrightarrow a \operatorname{tg} x + b = 0$$

Пример 2. Решить уравнение $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$

Решение: $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$ получим: $2\operatorname{tg} x - 3 = 0$

$$2\operatorname{tg} x = 3$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k.$$

Ответ: $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k$.

Алгоритм решения тригонометрического уравнения второй степени $a\sin^2x + b\sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$.

1.Посмотреть, есть ли в уравнении член $a\sin^2x$.

2.Если член $a\sin^2x$ в уравнении содержится (т.е. $a \neq 0$), то уравнение решается делением обеих его частей на \cos^2x и последующим введением новой переменной $z = \operatorname{tg}x$.

3.Если член $a\sin^2x$ в уравнении не содержится (т.е. $a=0$), то уравнение решается методом разложения на множители : за скобки выносят $\cos x$.

Пример 3. Решить уравнение $\sin^2x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2x = 0$.

Решение: (Решаем, используя второй пункт алгоритма.)

Разделив обе части уравнения почленно на \cos^2x , получим

$$\operatorname{tg}^2x - 3\operatorname{tg}x + 2 = 0. \text{ Введя новую переменную } z = \operatorname{tg}x, \text{ получим } z^2 - 3z + 2 = 0;$$

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 2$$

$$\operatorname{tg}x = 1, \quad \operatorname{tg}x = 2.$$

$$\operatorname{tg}x = 1 \quad x = \operatorname{arctg}1 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg}x = 2 \quad x = \operatorname{arctg}2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x = \operatorname{arctg}2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

Решение. (Решаем, используя третий пункт алгоритма.)

Решим уравнение разложением на множители. $\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

$$\cos x (\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ или } (\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 0$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$ – однородное уравнение первой степени, решим его делением обеих частей уравнения на $\cos x$.

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}x + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 5. Решим систему уравнений $\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y. \end{cases}$

Решение: Из первого уравнения находим:

$$y = x - \frac{5\pi}{3}. \text{ Тогда } 2\sin y = 2\sin\left(x - \frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\sin x \cos \frac{5\pi}{3} - \cos x \sin \frac{5\pi}{3}\right) \\ = 2\left(\sin x \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right) = \sin x + \sqrt{3} \cos x.$$

Второе уравнение примет вид:

$$\sin x = \sin x + \sqrt{3} \cos x, \text{ откуда } \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Далее находим:

$$y = x - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{5\pi}{3} = \pi n - \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}; \quad \pi n - \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}.$$

Упражнения.

Решите уравнения.

37. а) $1 + \cos x + \cos 2x = 0;$

в) $4\sin x = 4 - \cos^2 x;$

б) $3\cos^2 x - 3\sin x = 0;$

г) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\frac{1}{2}.$

38. а) $\cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x;$

в) $5\cos x + 12\sin x = 13;$

б) $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = 1;$

г) $3\cos x - 2\sin 2x = 0.$

39. а) $1 - \cos x = 2\sin \frac{x}{2};$

в) $\cos 2x = 2\frac{1}{3}\sin x;$

б) $1 + \cos x = 2\cos \frac{x}{2};$

г) $\sqrt{x} \sin x - \cos x = 0.$

40. а) $\cos x + \sin x = 0;$

б) $\cos^2 x - 3\sin x \cos x = -1;$

$$b) 3\cos^2x = 4\sin x \cos x - \sin^2x;$$

$$r) 4\cos^2x - 7\sin 2x = 2.$$

$$41. a) \frac{1}{3\cos x + 4} = 2;$$

$$б) \frac{5}{3\sin x + 4} = 2;$$

$$b) \frac{2}{3\sqrt{2}\sin x - 1} = 1;$$

$$r) \frac{2}{3\sqrt{2}\cos x - 1} = 1.$$

$$42. a) \frac{3}{5\operatorname{tg}x + 8} = 1;$$

$$б) \frac{3}{5\operatorname{ctg}x + 8} = 1;$$

$$b) \frac{4}{\sqrt{3}\operatorname{tg}x + 5} = \frac{1}{2};$$

$$r) \frac{4}{\sqrt{3}\operatorname{ctg}x + 5} = \frac{1}{4}.$$

$$43. a) \frac{2\sin x + 7}{1,5\sin x + 3} = 2$$

$$б) \frac{2\cos x + 7}{1,5\cos x + 3} = 2$$

$$b) \frac{6}{\operatorname{tg}x + 2} = 3 - \operatorname{tg}x$$

$$r) \frac{6}{\operatorname{ctg}x + 2} = 3 - \operatorname{ctg}x$$

$$44. a) \frac{15}{\sin x + 1} = 11 - 2\sin x;$$

$$б) \frac{15}{\cos x + 1} = 11 - 2\cos x;$$

$$b) \frac{3}{\operatorname{tg}x + 1} = 2\operatorname{ctg}x - 1;$$

$$б) \frac{10}{\operatorname{tg}x + 2} = 3 - \operatorname{ctg}x.$$

45. Решите систему уравнений.

$$a) \begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \sin x \cos y = 0,25, \\ \sin x \cos y = 0,75; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}, \\ \cos^2 \pi x - \cos^2 \pi y = 0; \end{cases}$$

$$r) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Литература

а) основная литература

1. ЭБС «Znanium.com». Жавнерчик, В.Э. Справочник по математике и физике/ В.Э. Жавнерчик, Л.И. Майсеня, Ю.И. Савилова. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – 399 с.

2. ЭБС «Znanium.com» Дадаян, А.А. Математика.: учебник / А.А. Дадаян. - М.: Форум, 2013. - 544 с.

3. Дадаян, А.А. Математика: учебник/ А.А, Дадаян. – М.: Форум, 2011

4. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учеб. пособие/ А.А. Дадаян. – М.: Форум: ИНФРА-М, 2011

б) дополнительная литература

ЭБС «Znanium.com». Жавнерчик, В.Э. Справочник по математике и физике/ В.Э. Жавнерчик, Л.И. Майсеня, Ю.И. Савилова. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – 399 с.

ЭБС «Znanium.com» Дадаян, А.А. Математика.: учебник / А.А. Дадаян. - М.: Форум, 2013. - 544 с.