МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Майкопский государственный технологический университет» в поселке Яблоновском

Политехнический колледж

Методическое пособие для преподавателя по дисциплине «Элементы высшей математики»

п. Яблоновский – 2018

УДК 517(07)
ББК 22.1
М-54

Автор:
Схаплок А.А. – преподаватель первой категории

Настоящее методическое пособие подготовлено по разделу «Линейная и векторная алгебра» дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики специальностей 09.02.03 Программирование в компьютерных системах, 38.02.07 Банковское дело. Методическое пособие полностью соответствует требованиям государственного образовательного стандарта по дисциплине. Методическое пособие предназначено для специальностей среднего профессионального образования.

Содержание

Пояснительная записка

Методическое пособие составлено в помощь преподавателя по разделу «Линейная и векторная алгебра» дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики. Пособие предназначено для организации аудиторной и внеаудиторной работы студентов. Данное методическое пособие может быть использовано для специальностей 09.02.03 Программирование в компьютерных системах, 38.02.07 Банковское дело.

Материал пособия имеет определенную структуру: по каждой рассматриваемой теме дается теоретический материал с практическими примерами, после которого указан перечень практических заданий по теме

Тема 1: Матрицы. Операции над матрицами

Вопрос 1.1 Матрицы

Матрица − математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов. Матрицы широко применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений. В этом случае количество строк матрицы соответствует количеству уравнений в системе, а количество столбцов − количеству неизвестных. В результате решение систем линейных уравнений сводится к операции над матрицами.

Матрицей размером $m \times n$ называется совокупность чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы: a_{ij} − элемент матрицы, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца.

Две матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$ считаются *равными* ($A=B$) тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые размеры и равны их соответствующие элементы, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$.

Если матрица состоит из одного столбца или одной строки, то она называется *матрицей-столбцом* $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ или *матрицей-строкой* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$.

Если у матрицы количество строк (m) равно количеству столбцов (n), то матрицу называют *квадратной (n-го порядка)*.

Например, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ − квадратная матрица второго порядка

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ* квадратной матрицы, т.е. *главная диагональ* – диагональ, соединяющая левый верхний угол (элемент a_{11}) с нижним правым углом (элемент a_{nn}).

Диагональ, соединяющая левый нижний угол (элемент a_{n1}) с верхним правым углом (элемент a_{1n}), называется *побочной диагональю*.

Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной* и обозначается $diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Частным случаем диагональной матрицы служит квадратная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, которая называется *единичной* и обозначается *E*.

Если все элементы квадратной матрицы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю, то матрицу называют *верхней треугольной* (*ступенчатой*). Если все элементы квадратной матрицы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю, то матрицу называют *нижней треугольной*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*.

Квадратная матрица называется *симметрической*, если ее элементы удовлетворяют условию $a_{ij} = a_{ji}$.

Если в матрице *A* поменять местами строки и столбцы, то полученная матрица называется *транспонированной* (обозн. A^T). Если матрица *A* имеет размерность $m \times n$, то транспонированная матрица A^T имеет размерность $n \times m$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Вопрос 1.2 Линейные операции над матрицами

Суммой двух матриц *A* и *B* называется матрица, определяемая равенством

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. Найти их сумму.

Решение. $A + B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 2 & 12 & -3 \end{pmatrix}$

Сумма нулевой матрицы и любой матрицы *A* дает матрицу *A*: $A + 0 = 0 + A = A$.

Произведением числа k на матрицу A называется матрица, определяемого равенством

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример. Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ на число k=3.

Решение. $k \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -9 \\ 6 & 27 & 12 \end{pmatrix}$

Свойства линейных операций над матрицами. Операции сложения матриц и умножения матрицы на число называется *линейными операциями над матрицами*. Для любых матриц *A, B, C* одинаковых размеров и любых чисел p и q справедливы равенства:

1. $A + B = B + A$ − коммутативность сложения
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ − ассоциативность сложения
3. существует нулевая матрица O (тех же размеров, что и A) $A + O = A$
4. существует матрица $(-A)$, противоположная матрице A: $A + (-A) = O$
5. $p(A + B) = pA + pB$ умножение матрицы на число дистрибутивно по отношению к сложению матриц
6. $(p + q)A = pA + qA$ умножение матрицы на число дистрибутивно по отношению к сложению чисел
7. $(pq)A = p(qA)$
8. $1 \cdot A = A$

Вопрос 1.3 Умножение матриц

Произведением двух матриц $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ и

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nl} \end{pmatrix}$ называется матрица $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{pmatrix}$,

где $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ $(i = 1, 2, \dots m;\ j = 1, 2, \dots l)$, т.е. элемент матрицы-произведения, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B. Если матрица A имеет размерность $m \times n$, а матрица B − $n \times l$, то размерность их произведения − $m \times l$.

Операция умножения двух матриц выполнима только в том случае, если число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором; в этом случае говорят, что форма матриц *согласована*. Умножение всегда выполнимо, если оба сомножителя – квадратные матрицы одного и того же порядка.

Например, произведение двух квадратных матриц A и B 3-го порядка:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix},$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 + 0\cdot 3 + 1\cdot(-2) & -2\cdot 5 + 0\cdot 4 + 1\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + 1\cdot(-2) & 3\cdot 5 + (-1)\cdot 4 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}$$

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон, вообще говоря, не выполняется: $AB \neq BA$. Более того, из существования произведения AB вовсе не следует существование произведения BA.

Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными* или *коммутирующими между собой*.

Свойства умножения матриц

1. Ассоциативность умножения:

$$(AB)C = A(BC)$$

$$p(AB) = (pA)B = A(pB)$$

2. Дистрибутивность умножения относительно сложения

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

3. Произведение матрицы на единичную матрицу подходящего порядка равно самой матрице $AE = EA = A$.

4. Произведение матрицы на нулевую матрицу подходящего порядка равно нулевой матрице $AO = OA = O$.

Вопрос 1.4 Обратная матрица

Матрица называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю: $D_A \neq 0$ ($|A| \neq 0$). Если же определитель равен нулю, то матрица называется *вырожденной*.

Матрица B называется *обратной* по отношению к матрице A, если произведения AB и BA равны единичной матрице: $AB = BA = E$.

Для матрицы, обратной по отношению к матрице A, принято обозначение A^{-1}, т.е. $B = A^{-1}$.

Всякая невырожденная квадратная матрица A имеет обратную матрицу. Обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{A_+^T}{D_A},$$

где A_+^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A, D_A – определитель матрицы A; или (иначе)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D_A} & \frac{A_{21}}{D_A} & \cdots & \frac{A_{m1}}{D_A} \\ \frac{A_{12}}{D_A} & \frac{A_{22}}{D_A} & \cdots & \frac{A_{m2}}{D_A} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{D_A} & \frac{A_{2n}}{D_A} & \cdots & \frac{A_{mn}}{D_A} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A, D_A – определитель матрицы A.

Практические задания по теме:

Задание1.1 Даны матрицы A и B. Найти:

$а)$ $2AB + 5B^2 + 3BA$

$б)$ $A^{-1}; B^{-1}$

1	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	11	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	12	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	13	$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	14	$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	15	$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

6	$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -3 & -1 & 4\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & -1 & -\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$	16	$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 7\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 5\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 3 & -1 & 4\\ -1 & 0 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -3 & -1 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$	17	$A=\begin{pmatrix}7 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -3\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix}$
8	$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 0 & 3 & 2\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$	18	$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 6\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 8\\ -1 & -2 & 0\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$	19	$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$
10	$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & -5 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}$	20	$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 5\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

Тема 2: Определители квадратных матриц

Квадратной матрице $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \ddots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$ n-го порядка ставится в соответствие число $|A| = \det A = D_A = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \ddots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$, называемое *определителем матрицы* или *детерминантом*.

М*инором* M_{ij} к элементу a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n$ - $1)$-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} определителя n-го порядка называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е. число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Вопрос 2.1 Определители второго порядка

Определителем второго порядка называется число, обозначаемое символом

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (2.1)$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot (-4) = 15 - 8 = 7$.

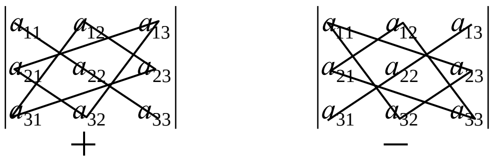
Вопрос 2.2 Определители третьего порядка

Определителем третьего порядка называется число, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \qquad (2.2)$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

Чтобы запомнить, произведения каких элементов берутся в правой части равенства (2) и с каким знаком, полезно использовать следующее правило треугольников:



Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) - 3 \cdot 0 \cdot 3 =$$

$$= -6 - 12 - 0 - 2 + 8 - 0 = -12$$

Вопрос 2.3 Определители *n*-го порядка

Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов некоторой стоки или столбца на их алгебраические дополнения, т.е. определитель можно разложить по элементам некоторой строки или столбца.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Решение. Разложим определитель по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 +$$

$$+1\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 0 + 3\cdot 0 - 1\cdot(-2) = 2$$

Вопрос 2.4 Свойства определителей

1. Если строки и столбцы определителя поменять местами, то величина определителя не изменится, т.е. $|A| = |A^T|$

2. Если два столбца или две строки определителя поменять местами, то определитель поменяет знак.

3. Умножение всех элементов одного столбца или одной строки определителя на любое число *k* равносильно умножению определителя на это число *k*. *Иначе*, общий множитель в столбце или в строке можно выносить за знак определителя.

4. Если квадратная матрица *A* *n*-го порядка умножается на некоторое ненулевое число *k*, то определитель полученной матрицы равен произведению определителя исходной матрицы *A* на число k^n .

5. Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковые строки, то он равен нулю.

6. Если элементы двух столбцов или двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

7. Определитель содержащий нулевой столбец или нулевую строку равен нулю.

8. Если каждый элемент в каком-то столбце или какой-то строке определителя равен сумме двух слагаемых, то исходный определитель равен сумме двух определителей, в которых вместо этого столбца или этой строки стоят первые и вторые слагаемые соответственно, а остальные столбцы или строки совпадают с исходным определителем.

9. Если к элементам некоторого столбца или строки определителя

прибавить соответствующие элементы другого столбца или строки, умноженные на любой общий множитель k, то величина определителя не изменится.

10. Определитель верхней (нижней) треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали матрицы.

11. Определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц, т.е. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

12. Определитель равен сумме произведений элементов какого-нибудь столбца или строки на их алгебраические дополнения.

Практические задания по теме:

Задание 2.1 Вычислить определитель четвертого порядка

1	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	11	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$
2	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	12	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 7 \\ -3 & 3 & 0 & 8 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	13	$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$	14	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -4 & -7 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$	15	$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$
6	$\begin{vmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -8 \\ 1 & 7 & 3 & 9 \end{vmatrix}$	16	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

7	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -8 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	17	$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}$
8	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 & 7 \\ 7 & -1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \end{vmatrix}$	19	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 7 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	20	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Тема 3: Системы линейных уравнений

Вопрос 3.1 Системы линейных уравнений

Дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.1}$$

Решением этой системы называется совокупность n чисел $\left(\overline{x_1}; \overline{x_2}; ...; \overline{x_n}\right)$, которые, будучи подставлены вместо неизвестных в уравнения, обращают эти уравнения в тождества.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение $\left(\overline{x_1}; \overline{x_2}; ...; \overline{x_n}\right)$. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет только одно решение. Совместная система называется *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & \dots & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ и $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & \dots & ... & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называются соответственно *матрицей* и *расширенной матрицей* системы (3.1).

Решить систему уравнений можно различными способами. Если в системе уравнений первой степени количество уравнений совпадает с количеством неизвестных можно решить одним из способов:

1) по формулам Крамера
2) методом Гаусса
3) методом обратной матрицы

Рассмотрим на примере системы трех уравнений с тремя неизвестными x, y, z:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=h_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=h_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=h_3. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Вопрос 3.2 Решение системы линейных уравнений по формулам Крамера

Формулы Крамера: $x=\dfrac{D_x}{D}$, $y=\dfrac{D_y}{D}$, $z=\dfrac{D_z}{D}$,

где $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $D_x=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $D_y=\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}$

Если $D\neq 0$, то существует, и при том единственное решение системы (3.2).

Если $D=0$ и хотя бы один из определителей D_x, D_y, D_z отличен от нуля, то система (3.2) решений не имеет (несовместна).

Если $D=0$ и $D_x=D_y=D_z=0$, то система (3.2) либо совсем не имеет решений, либо если система имеет хотя бы одно решение, то она имеет бесконечное множество решений.

Замечание. Если $D=0$, то по формулам Крамера систему решить невозможно, нужно использовать метод Гаусса.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 3x-2y+4z=21 \\ 3x+4y-2z=9 \\ 2x-y-z=10 \end{cases}$ по формулам Крамера.

Решение.

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot4\cdot(-1)+(-2)\cdot(-2)\cdot2+3\cdot(-1)\cdot4-4\cdot4\cdot2-(-2)\cdot3\cdot(-1)-(-2)\cdot(-1)\cdot3=$$

$$=-12+8-12-32-6-6=-60$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix}=21\cdot4\cdot(-1)+(-2)\cdot(-2)\cdot10+9\cdot(-1)\cdot4-4\cdot4\cdot10-(-2)\cdot9\cdot(-1)-(-2)\cdot(-1)\cdot21=$$

$$=-84+40-36-160-18-42=-300$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot 9\cdot(-1) + 21\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 10\cdot 4 - 4\cdot 9\cdot 2 - 21\cdot 3\cdot(-1) - (-2)\cdot 10\cdot 3 =$$

$$= -27 - 84 + 120 - 72 + 63 + 60 = 60$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot 10 + (-2)\cdot 9\cdot 2 + 3\cdot(-1)\cdot 21 - 21\cdot 4\cdot 2 - (-2)\cdot 3\cdot 10 - 9\cdot(-1)\cdot 3 =$$

$$= 120 - 36 - 63 - 168 + 60 + 27 = -60$$

$$x = \frac{-300}{-60} = 5,\ y = \frac{60}{-60} = -1,\ z = \frac{-60}{-60} = 1$$

Ответ: $x = 5,\ y = -1,\ z = 1.$

Вопрос 3.3 Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных по следующей схеме: выписывают расширенную матрицу системы $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & h_3 \end{array}\right)$ и над строками этой матрицы производят элементарные преобразования, приводя ее к ступенчатому (верхнему треугольному) виду: $\left(\begin{array}{ccc|c} a_1' & b_1' & c_1' & h_1' \\ 0 & b_2' & c_2' & h_2' \\ 0 & 0 & c_3' & h_3' \end{array}\right)$.

Разрешаются следующие элементарные преобразования: 1) изменять порядок строк матрицы, что соответствует изменению порядка уравнений; 2) умножать строки на любые отличные от нуля числа, что соответствует умножению соответствующих уравнений на эти числа; 3) прибавлять (вычитать) к любой строке матрицы другую, умноженную на отличное от нуля число, что соответствует прибавлению к одному уравнению системы другого, умноженного на число.

По полученной ступенчатой матрице записывают систему линейных уравнений $\begin{cases} a_1'x + b_1'y + c_1'z = h_1', \\ \quad b_2'y + c_2'z = h_2', \\ \qquad c_3'z = h_3', \end{cases}$ из которой последовательно находятся значения переменных z, y, x.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21 \\ 3x + 4y - 2z = 9 \\ 2x - y - z = 10 \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение. $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 4 & 21\\ 3 & 4 & -2 & 9\\ 2 & -1 & -1 & 10\end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 4 & 21\\ 3 & 4 & -2 & 9\\ 2 & -1 & -1 & 10\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 4 & 21\\ 0 & 6 & -6 & -12\\ 0 & 1 & -11 & -12\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 4 & 21\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -11 & -12\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 4 & 21\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -10 & -10\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -2 & 4 & 21\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}3x-2y+4z=21\\ y-z=-2\\ z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=17\\ y=-1\\ z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=15\\ y=-1\\ z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=-1\\ z=1\end{cases}$$

Ответ: $x=5,\ y=-1,\ z=1.$

Вопрос 3.4 Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы

Система линейных уравнений (3.2) может быть записана в виде $A\cdot X=H$, где $A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}$. Тогда решение системы (3.2) имеет вид $X=A^{-1}\cdot H$.

Замечание. Если $D_A=0$, то обратной матрицы не существует, и решить систему методом обратной матрицы невозможно. В этом случае система решается методом Гаусса.

Пример. Решить систему $\begin{cases}3x-2y+4z=21\\ 3x+4y-2z=9\\ 2x-y-z=10\end{cases}$ методом обратной матрицы.

Решение. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 3 & 4 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix}21\\ 9\\ 10\end{pmatrix}$

$$D_A=\begin{vmatrix}3 & -2 & 4\\ 3 & 4 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=3\cdot4\cdot(-1)+(-2)\cdot(-2)\cdot2+3\cdot(-1)\cdot4-4\cdot4\cdot2-(-2)\cdot3\cdot(-1)-(-2)\cdot(-1)\cdot3=$$

$$=-12+8-12-32-6-6=-60$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & -2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-4-2=-6$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-(-3+4)=-1$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3-8=-11$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-(2+4)=-6$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3-8=-11$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-(-3+4)=-1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 4 & -2\end{vmatrix}=4-16=-12$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-(-6-12)=18$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=12+6=18$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-60}\cdot\begin{pmatrix}-6 & -6 & -12\\ -1 & -11 & 18\\ -11 & -1 & 18\end{pmatrix}=\frac{1}{60}\cdot\begin{pmatrix}6 & 6 & 12\\ 1 & 11 & -18\\ 11 & 1 & -18\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{60}\cdot\begin{pmatrix}6 & 6 & 12\\ 1 & 11 & -18\\ 11 & 1 & -18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}21\\ 9\\ 10\end{pmatrix}=\frac{1}{60}\cdot\begin{pmatrix}6\cdot 21+6\cdot 9+12\cdot 10\\ 1\cdot 21+11\cdot 9-18\cdot 10\\ 11\cdot 21+1\cdot 9-18\cdot 10\end{pmatrix}=\frac{1}{60}\cdot\begin{pmatrix}300\\ -60\\ 60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

Ответ: $x=5,\ y=-1,\ z=1.$

Практические задания по теме:

Задание 3.1 Решить систему линейных уравнений:

а) по формулам Крамера;

б) методом Гаусса;

в) методом обратной матрицы.

1	$\begin{cases}2x+y+3z=7\\ 2x+3y+z=1\\ 3x+2y+z=6\end{cases}$	11	$\begin{cases}2x-4y+3z=1\\ x-2y+4z=3\\ 3x-y+5z=2\end{cases}$
2	$\begin{cases}2x-y+2z=3\\ x+y+2z=-4\\ 4x+y+4z=-3\end{cases}$	12	$\begin{cases}2x-y+z=2\\ 3x+2y+2z=-2\\ x-2y+z=1\end{cases}$

3	$\begin{cases} 2x-y+3z=-4 \\ x+3y-z=11 \\ x-2y+2z=-7 \end{cases}$	13	$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3x-2y+4z=12 \\ 3x+4y-2z=6 \\ 2x-y-z=-9 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x-y-3z=-9 \\ x+5y+z=20 \\ 3x+4y+2z=15 \end{cases}$	15	$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x-y+z=12 \\ x+2y+4z=6 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 8x+3y-6z=-4 \\ x+y-z=2 \\ 4x+y-3z=-5 \end{cases}$	17	$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 4x+3y+3z=4 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 3x-2y-5z=5 \\ 2x+3y-4z=12 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \\ 4x+3y+2z=16 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=11 \\ 4x+y+4z=22 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x+3y-6z=12 \\ 3x+2y+5z=-10 \\ 2x+5y-3z=6 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x-2y+3z=14 \\ 2x+3y-4z=-16 \\ 3x-2y-5z=-8 \end{cases}$	20	$\begin{cases} -5x+y+z=0 \\ x-6y+z=0 \\ x+y-7z=0 \end{cases}$

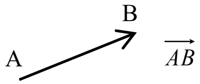
Тема 4: Векторы

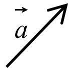
Вопрос 4.1 Векторы и операции над векторами

Многие геометрические и физические величины характеризуются полностью, если известна их числовая характеристика. Например, масса тела, длина, температура и т.д. Такие величины в математике называют *скалярными величинами* или *скалярами*.

Однако, часто встречаются величины, которые не в полной мере характеризуются знанием их числовой характеристики. Например, сила, скорость, ускорение и т.д. Для полной характеристики подобных величин кроме числовых значений надо знать и направление. Такие величины называют *векторными величинами* или *векторами*.

Вектором называется направленный отрезок, т.е. отрезок, для которого указано, какая из ограничивающих его точек считается первой, а какая – второй.



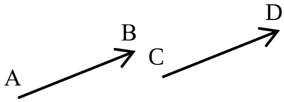


Длиной или *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка *AB,* изображающего данный вектор. Обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$

Вектор называется *единичным*, если длина его равна единице. Вектор называется *нулевым*, если длина его равна нулю.

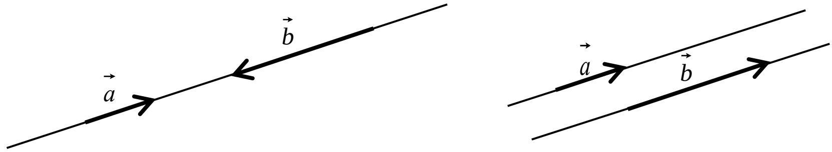
Нуль-вектор задается парой совпадающих точек. Обозначение: $\vec{0}$.

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *эквивалентными*, если они имеют равные длины и одно и тоже направление не зависимо от положения их начала.



Два вектора имеющие равные длины и противоположные направления называются *взаимно противоположными*.

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначение: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.



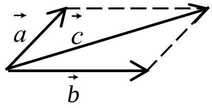
Замечание. Нуль вектор считается коллинеарным любому вектору. Если ненулевые векторы коллинеарны, то они имеют либо одно и тоже направление, либо противоположное направление. В первом случае они называются *сонаправленными*, во втором – *противонаправленными*. Обозначение: сонаправленность – $\vec{a} \downarrow\downarrow \vec{b}$, противонаправленность – $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор, который получается следующим образом: от точки *A* откладывается вектор $\vec{a}$; от его конца *B* откладывается вектор $\vec{b}$; точка *A* соединяется с концом вектора $\vec{b}$ (точкой *C*) и полученный вектор $\vec{c}$ является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Если слагаемые векторы неколлинеарны, то при сложении векторов можно воспользоваться и правилом параллелограмма.

Правило параллелограмма: сумма двух неколлинеарных векторов равна диагонали параллелограмма, построенного на этих векторах.



Свойства сложения векторов:

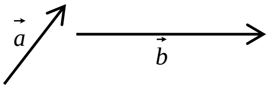
1. Сложение векторов ассоциативно, т.е. $\forall$ векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеет место следующее соотношение $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

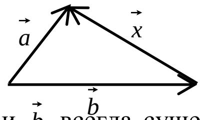
2. Сложение векторов коммутативно, т.е. $\forall$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место следующее соотношение $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

3. $\forall$ вектора $\vec{a}$ имеет место следующее соотношение $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

4. $\forall$ вектора $\vec{a}$ $\exists$ вектор $\vec{a'}$ имеет место следующее соотношение $\vec{a}+\vec{a'}=\vec{0}$.

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{x}$ удовлетворяющий условию $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$.





$\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$

Теорема: Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ всегда существует и единственным образом определенная разность векторов $\vec{a}-\vec{b}$.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на действительное число $\alpha \neq 0$ называется вектор $\vec{p}$ удовлетворяющий следующим условиям:

1. $\left|\vec{p}\right|=|\alpha|\cdot\left|\vec{a}\right|$
2. $\vec{p}\downarrow\downarrow\vec{a}$, если $\alpha>0$
3. $\vec{p}\downarrow\uparrow\vec{a}$, если $\alpha<0$

Произведение нуль-вектора на любое число или числа ноль на любой вектор есть нуль-вектор.

Свойства произведения вектора на число:

1. $\forall$ вектора $\vec{a}$ имеет место $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

2. Для произвольных чисел α и β и произвольного вектора $\vec{a}$ имеет место следующее соотношение $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})=(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}$

3. Для произвольных чисел α и β и произвольного вектора $\vec{a}$ имеет место следующее соотношение $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$

Вопрос 4.2 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла между ними $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \hat{,} \vec{b})$.

Теорема: 1. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ положительно тогда и только тогда, когда $\vec{a} \neq \vec{0}, \quad \vec{b} \neq \vec{0}, \quad (\vec{a} \hat{,} \vec{b}) < \frac{\pi}{2}$

2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отрицательно тогда и только тогда, когда $\vec{a} \neq \vec{0}, \quad \vec{b} \neq \vec{0}, \quad (\vec{a} \hat{,} \vec{b}) > \frac{\pi}{2}$

3. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий: $а) \vec{a} = \vec{0}, \quad б) \vec{b} = \vec{0}, \quad в) (\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = \frac{\pi}{2},$ *т.е.* $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Теорема: Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a}(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно сумме парных произведений одноименных координат, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

Пример: Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}(5;7;-2)$ и $\vec{b}(0;-1;3)$

Решение: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 0 + 7 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 = 0 - 7 - 6 = -13$

Свойства скалярного произведения:

1. $\forall$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место следующее соотношение $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2. $\forall$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и числа α имеет место следующее соотношение $(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

3. $\forall$ векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеет место следующее соотношение $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

4. $\forall$ вектора $\vec{a}$ имеет место следующее соотношение $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Вопрос 4.3 Угол между векторами

Угол φ между векторами $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ можно найти по формуле $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, т.е. косинус угла между векторами равен отношению скалярного произведения этих векторов к произведению модулей этих векторов.

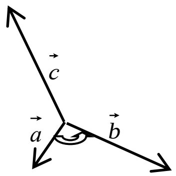
Пример: Найти угол между векторами $\vec{a}(1;1;1)$ и $\vec{b}(2;0;3)$

Решение: $\cos\varphi = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{39}} \approx 0{,}8006$, $\varphi \approx 36^0 50'$

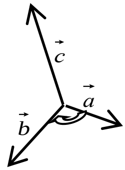
Вопрос 4.4 Векторное произведение двух векторов

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ три ненулевые вектора, не параллельные одной плоскости. Приводя их к общему началу получим систему трех векторов.

Система трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется правой, если поворот вектора $\vec{a}$, совмещающий его по кратчайшему пути с вектором $\vec{b}$ совершается против часовой стрелки для наблюдателя, глаз которого помещается в конце вектора $\vec{c}$.

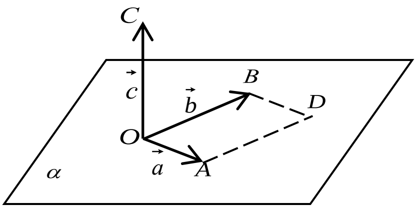


Если же упомянутый поворот совершается по часовой стрелке, то система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется левой.



Имеет значение в каком порядке взяты векторы.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на не коллинеарный с ним вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который строится следующим образом:



1) его модуль численно равен площади параллелограмма ($AOBD$), построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. он равен $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$

2) его направление перпендикулярно к плоскости указанного параллелограмма

3) при этом направление вектора $\vec{c}$ выбирается так (из двух возможных), чтобы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ составляли правую систему.

Обозначение: $\vec{a}\times\vec{b}$

Свойства векторного произведения*:*

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак на обратный, т.е. $\forall$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место следующее соотношение $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

2. $\forall$ векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеет место следующее соотношение $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

3. $\forall$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и числа α имеет место следующее соотношение $(\alpha\cdot\vec{a})\times\vec{b}=\alpha\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$, то векторное произведение находится по формуле $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$

Пример: Найти векторное произведение векторов $\vec{a}(5,0,-1)$ и $\vec{b}(-2,4,1)$

Решение: $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 1 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}5 & 0\\ -2 & 4\end{vmatrix}\right)=(4,-3,20)$

Пример: Даны точки $A=(5,-2,-1)$, $B=(6,-3,-1)$, $C=(-2,-2,0)$, $D=(0,-3,1)$.

Найти: *а*) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$

б) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$

в) векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$:

$\overrightarrow{AB}=(6-5,\ -3-(-2),\ -1-(-1))=(1,-1,0)$ и $\overrightarrow{CD}=(0-(-2),\ -3-(-2),\ 1-0)=(2,-1,1)$.

а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=1\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 1=2+1+0=3$

б) $\cos\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{3}{\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\qquad\varphi\approx 30^0$

в) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right)=(-1,-1,1)$

Практические задания по теме:

Задание 4.1 Даны координаты точек *A*, *B*, *C* и *D*. Найти:

а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$;

б) $\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{BC}$

в) $(\overrightarrow{AC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BD})$

1	$A=(1,1,1)$, $B=(0,-2,1)$, $C=(-4,1,3)$, $D=(-2,-2,1)$	11	$A=(-6,1,1)$, $B=(0,-3,6)$, $C=(-10,1,3)$, $D=(7,-2,1)$
2	$A=(0,-2,1)$, $B=(0,-2,-1)$, $C=(-3,1,3)$, $D=(-2,2,-1)$	12	$A=(3,3,1)$, $B=(-3,-4,1)$, $C=(1,6,3)$, $D=(-2,0,9)$
3	$A=(0,1,0)$, $B=(0,2,1)$, $C=(5,1,-3)$, $D=(-4,-2,-1)$	13	$A=(-6,1,0)$, $B=(7,-1,1)$, $C=(0,1,-2)$, $D=(-3,3,-7)$
4	$A=(10,1,-1)$, $B=(-3,2,1)$, $C=(3,0,3)$, $D=(-2,-2,1)$	14	$A=(1,-10,1)$, $B=(5,-5,1)$, $C=(3,-1,7)$, $D=(-2,-8,1)$
5	$A=(5,-2,-1)$, $B=(0,0,1)$, $C=(6,1,-3)$, $D=(0,-3,1)$	15	$A=(-4,1,8)$, $B=(-2,-3,1)$, $C=(7,1,-7)$, $D=(0,-1,1)$
6	$A=(-1,-1,0)$, $B=(4,-4,1)$, $C=(0,1,-3)$, $D=(-2,2,2)$	16	$A=(1,-6,1)$, $B=(0,-11,1)$, $C=(0,9,3)$, $D=(3,-2,3)$
7	$A=(1,10,1)$, $B=(0,0,3)$, $C=(-2,10,3)$, $D=(-2,0,0)$	17	$A=(1,3,-1)$, $B=(8,-2,10)$, $C=(6,-1,-3)$, $D=(2,2,2)$
8	$A=(5,-1,1)$, $B=(5,-2,-1)$, $C=(-4,1,-3)$, $D=(-3,0,1)$	18	$A=(1,9,-1)$, $B=(0,-7,0)$, $C=(7,-5,3)$, $D=(6,-2,11)$

9	$A=(1,1,-3)$, $B=(4,-1,1)$, $C=(-1,1,7)$, $D=(-3,-5,0)$	19	$A=(8,1,-9)$, $B=(10,-2,1)$, $C=(11,1,-3)$, $D=(2,-12,1)$
10	$A=(3,-7,1)$, $B=(-2,2,4)$, $C=(3,-1,3)$, $D=(-2,8,1)$	20	$A=(13,1,-1)$, $B=(-6,0,1)$, $C=(0,-1,-8)$, $D=(2,2,11)$