

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
политехнический колледж филиала федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Майкопский государственный технологический университет» в п.
Яблоновском

**Методические рекомендации по выполнению
практических работ
по дисциплине ЕН. 01 Математика**

**Раздел: Матрицы и определители. Решение систем
линейных уравнений.**

форма обучения- очная

Яблоновский, 2018

УДК 51(07)

ББК 22.1

М-54

Одобрено предметной (цикловой) цикловой комиссией
информационных и математических дисциплин

Протокол №8 от 27 июня 2018г

Председатель предметной (цикловой) комиссии

Схаплок А.А.

Разработчик: Шартан Р.Я.– преподаватель первой категории
политехнического колледжа филиала федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Майкопский государственный технологический университет»
в п. Яблоновском

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению практических работ составлены в помощь студентам. Дисциплина «Математика» входит в обязательную часть математического и общего естественно - научного цикла, изучается специальностями 38.02.01 Страховое дело (по отраслям), 40.02.01 Право и организация социального обеспечения.

Основная задача обучения математике – обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества для изучения смежных дисциплин.

Программой предусмотрено дальнейшее вооружение студентов математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения специальных дисциплин, разработки курсовых и дипломных проектов, для профессиональной деятельности и продолжения образования.

Задачами данного курса являются:

- усвоение основ математических знаний (теорем, определений, формул);
- формирование умений, навыков студентов на основе полученных знаний;
- развитие интереса студентов к предмету и стимулирование их познавательной активности.

Основными идеями, проходящими весь курс, являются:

- приобретение ряда общих умений необходимых для успешного усвоения математики;
- использование математических знаний при изучении общетехнических и специальных дисциплин, в курсовом и дипломном проектировании.

Особое значение для развития математического мышления студентов имеют практические упражнения, во время которых студент должен уметь:

- проводить сложные и несложные дедуктивные рассуждения;
- обосновывать с разумной степенью полноты решения задач и письменно оформлять их;
- формулировать на математическом языке несложные задачи прикладного характера и интерпретировать полученные результаты;
- пользоваться электронно-вычислительной техникой при решении математических задач;
- пользоваться справочной литературой.

Матрицы. Операции над матрицами.

Определение 1. Прямоугольная таблица чисел вида

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{31}a_{32} \dots a_{mn} \end{vmatrix}$$

называется матрицей. Здесь a_{ij} –

действительные числа ($i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$), называются элементами матрицы, i и j – соответственно индексы строки и столбца. При этом произведение $m \times n$ число строк и столбцов называют размером матрицы A .

Определение 2. Две матрицы A и B называются равными ($A=B$), если они имеют одинаковые размеры и соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij}$,

$$i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Линейные операции над матрицами.

1. Сумма матриц. Суммой матриц A и B одинаковый размер называется матрица C того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21}b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ b_{m1}b_{m2} \dots b_{mn} \end{pmatrix} \\ A+B &= \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21}b_{22} \dots b_{2n} \\ b_{m1}b_{m2} \dots b_{mn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \dots & a_{1n}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots \\ a_{m1+b_{m1}} & a_{m2+b_{m1}} \dots & a_{mn+b_{mn}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Пример 1. Вычислить сумму двух матриц.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2+7 & 3+3 & 3+0 \\ 0+6 & -1+(-1) & 2+5 \\ 3+7 & 4+5 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 10 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Умножение матрицы на действительное число. Произведением матрицы A на число α называется матрица , каждый элемент которой получен умножением соответствующего элемента матрицы A на число α .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$A\alpha = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример2. Найти произведение матрицы A на число $\alpha = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\alpha A = 3 \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 * 3 & 3 * 3 & 0 * 3 \\ 6 * 3 & -1 * 3 & 5 * 3 \\ 7 * 3 & 5 * 3 & 2 * 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 9 & 0 \\ 18 & -3 & 15 \\ 21 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Транспонирование матрицы. Транспонированием матрицы называется замена строк матрицы на ее столбцы с сохранением их порядка (или, что-то же самое, замена столбцов матрицы на ее строки). Пусть дана исходная матрица A:

$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$, тогда, согласно определению,

транспонированная матрица $A' = \begin{pmatrix} a_{11}a_{21} \dots a_{m1} \\ a_{12}a_{22} \dots a_{m2} \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{1n}a_{2n} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$.

Пример 3. Даны матрицы А и В:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}. \text{ Записать соответствующие}$$

транспонированные матрицы.

Решение:

$$A' = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. Умножение матрицы. Пусть даны матрицы $A =$

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11}b_{12} \dots b_{1k} \\ b_{21}b_{22} \dots b_{2k} \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}b_{n2} \dots b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы А и В называется матрица С, элементы которой c_{ij} равны скалярным произведениям векторов – строк a_i матрицы А на вектор – столбцы b_j матрицы В.

$$C = AB = \|c_{ij}\|, c_{ij} = a_i b_j = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj} \\ I=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,k.$$

$$\text{Пример 4. } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В, то произведение матриц АВ имеет смысл. По формулам

$$C = AB = \|c_{ij}\|, c_{ij} = a_i b_j = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj} \\ I=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,k. \text{ Получаем в произведении матрицу размером } 3 \times 2:$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA не имеет смысла, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A .

Пример 5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение: Здесь мы найдем произведение данных матриц AB и BA :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 & 4 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 & 5 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

Как видно из результата, матрица произведения зависит от порядка расположения матриц в произведении. В обоих случаях произведения матриц имеют тот же размер, что и у исходных сомножителей: 2×2 .

Свойства произведений матриц.

Пусть A , B , C – матрицы соответствующих размеров (чтобы произведение матриц были определены), а α – действительное число. Тогда следующие свойства произведения матриц имеют место:

- 1) $(AB)C = A(BC)$,
- 2) $(A+B)C = AC+BC$,
- 3) $A(B+C) = AB+AC$,
- 4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,

$$5) AE = A \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{-единичная матрица,}$$

$$6) EA = A\alpha.$$

Выполните упражнения:

6. Найти произведение матриц AB и BA , если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Вычислить матрицу $D = AB - C^2$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. Найти произведение матриц ABC , если $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -128 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить матрицу $D = ABC - 3E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$C = (2 \quad 0 \quad 5), E - \text{единичная матрица.}$$

Определители квадратных матриц. Обратная матрица.

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{ij})$, или определителем первого порядка, называется элемент a_{11}

$$\Delta_1 = |A| = a_{11}.$$

Определителем матрицы второго порядка $A = (a_{ij})$, или определителем второго порядка, называется число, которое вычисляется по формуле

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Например: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Решение: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 10 - 3 = 7.$

Определителем матрицы третьего порядка $A = (a_{ij})$, или определителем третьего порядка, называется число, которое вычисляется по формуле

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Например: Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2 - 1 + 2 - 1 + 4 - 1 = 5$$

1. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$.

Пусть дана квадратная матрица А n-го порядка

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{31} a_{32} \dots a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы

(n-1) го порядка, полученной из матрицы А вычеркивание i-й строки j-го столбца.

Например, Минором элемента a_{12} матрицы А третьего порядка будет

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца (i+j)- четное число, и отличается от минора знаком, когда (i+j)- нечетное число.

Пример: Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 1) = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3.$$

Обратная матрица. Алгоритм вычисления обратной матрицы.

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A , если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица A^{-1} .
 $A = A \cdot A^{-1} = E$.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A – вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратной матрицы A^{-1} существует.

2. Находим матрицу A' , транспонированную к A .

3. Находим алгебраические дополнения элементов, транспонированной матрицы $\widetilde{A}: \widetilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ij}$, ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$).

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{A} \cdot \tilde{A}$ ($|A| \neq 0$)

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1} , исходя из ее определения $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Пример: Найти матрицу обратную к данной $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

1. Находим определитель матрицы $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = \\ = 2 - 1 + 2 - 1 + 4 - 1 = 5 \neq 0$$

2. Находим матрицу A' , транспонированную к A . Для этого находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 1) = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3.$$

3. $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$4. A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$

Пример: Определить, имеет ли матрица А обратную, и если имеет, то вычислите ее $A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение систем трех линейных уравнений с тремя переменными методом Крамера.

Система трех линейных уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases}$$

при условии, что определитель системы, $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$

имеет единственное решение, находится по формулам Крамера.

$$X = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad Y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad Z = \frac{\Delta z}{\Delta}, \text{ где}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_2 \end{vmatrix}$$

Если же $\Delta = 0$, то система является, либо неопределенной, либо несовместной. В том случае, если система однородная, т.е

имеет вид $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0, \end{cases}$ и $\Delta \neq 0$, то она имеет единственное решение $x=0, y=0, z=0$.

Если определитель однородной системы $\Delta = 0$, то система сводится, либо к двум независимым уравнениям (третье является

следствием), либо к одному (следствием которого являются остальные два уравнения). В обеих случаях однородная система имеет бесконечное множество решений.

Пример1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 7x - 3y + 5z = 32, \\ 5x + 2y + z = 11, \\ 2x - y + 3z = 14. \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$

$$= 7 \cdot 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \cdot 2 + 5 - (-1) \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot 7 = 42 - 6 - 25 - 20 + 45 + 7 + 43 \neq 0.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 32 & -3 & 5 \\ 11 & 2 & 1 \\ 14 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 32 \cdot 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \cdot 14 + 11 \cdot (-1) \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 14 - 11 \cdot (-3) \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot 32 = 192 - 42 - 55 - 140 + 99 + 32 = 86.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 32 & 5 \\ 5 & 11 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 11 \cdot 3 + 32 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 14 \cdot 5 - 5 \cdot 11 \cdot 2 - 32 \cdot 5 \cdot 3 - 14 \cdot 1 \cdot 7 = 231 + 64 + 351 - 110 - 480 - 98 = -43.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 32 \\ 5 & 2 & 11 \\ 2 & -1 & 14 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot 14 + (-3) \cdot 11 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \cdot 32 - 32 \cdot 2 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) \cdot 14 - (-1) \cdot 11 \cdot 7 = 156 - 66 - 160 - 128 + 210 + 77 = 129.$$

$$X = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{86}{43} = 2; \quad Y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-43}{43} = -1; \quad Z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{129}{43} = 3.$$

Проверка: $\begin{cases} 7 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 = 32 \\ 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 11 \\ 2 \cdot 2 + 1 + 3 \cdot 3 = 14 \end{cases}$

Ответ: (2; -1; 3).

2. Решить систему уравнений:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$ Ответ: (4;2;1).

б) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$ Ответ: (8;4;2)

в) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 10, \\ x + 5y - 2z = -15, \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases}$ Ответ: (-1;-2;3)

- г) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$ Ответ: (1;-3;0).
- д) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$ Ответ: (-2;1;-1).
- е) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -11, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -8, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$ Ответ: (-11;-8;7)

Решение систем трех линейных уравнений с тремя переменными методом Гаусса.

Методом Гаусса является способ решения линейных уравнений путем последовательного исключения переменных и сведения ее к треугольной системе уравнений.

Подробно и последовательно изложим решение системы трех линейных уравнений с тремя переменными методом Гаусса на

примере системы уравнений: $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$

Выпишем расширенную матрицу данной системы и приведем ее к трапециевидной форме

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & -11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & 17 & -13 & 15 \\ 0 & -5 & 10 & -51 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & -5 & 10 & 15 \\ 0 & 17 & -13 & -51 \end{array} \right) \sim \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 17 & -13 & -51 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 13 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 21 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Запишем систему, соответствующую этой трапециевидной матрице и решим ее методом обратного хода.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 13, \\ -x_2 + 2x_3 = 3, \\ 21x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13 - 3x_3 + 4x_2, \\ x_2 = -3 + 2x_3, \\ x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13 - 3x_3 + 4x_2, \\ x_2 = -3 + 2x_3, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13 - 3x_3 + 4x_2, \\ x_2 = -3 + 2 * 0, \\ x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13 - 3x_3 + 4x_2, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 13 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-3), \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Проверка $\begin{cases} 1 + 12 + 0 = 13 \\ 4 - 3 - 0 = 1 \\ -2 - 9 + 0 = -11. \end{cases}$

Ответ: (1;-3;0)

Решите системы линейных уравнений методом Гаусса.

$$1) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -9, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Ответ: (-1;1;-1)

$$2) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Ответ: (-1,5; 8; 23,5)

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$$

Ответ: (-1;-3;2).

$$4) \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$$

Ответ: (1;-3;0).

$$5) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

Ответ: (-2;1;-1).

$$6) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -11, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -8, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Ответ: (-11;-8;7).

$$7) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

Ответ: (-1;0;1)

$$8) \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -8, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -9, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$$

Ответ: (-3;2;4).

Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.

Пусть дана система трех линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Решением системы линейных уравнений методом обратной матрицы определяется по формуле $X = A^{-1} \cdot B$,

где A^{-1} -обратная матрица матрицы $|A|$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Пример1: Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$$

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 24 - 12 - 27 - 20 - 8 = -58$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-10 + 12) = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -(10 + 6) = -16$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-5 - 9) = -14$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix} = -(-2 + 6) = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(-4 - 6) = 10$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7.$$

$$3. \quad A^{-1} = -\frac{1}{58} \begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{58} & \frac{16}{58} & \frac{1}{58} \\ \frac{2}{58} & \frac{14}{58} & -\frac{10}{58} \\ \frac{13}{58} & \frac{4}{58} & -\frac{7}{58} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} \frac{23}{58} & \frac{16}{58} & \frac{1}{58} \\ \frac{2}{58} & \frac{14}{58} & -\frac{10}{58} \\ \frac{13}{58} & \frac{4}{58} & -\frac{7}{58} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{23}{58} \cdot 6 + \frac{16}{58} \cdot 20 + \frac{1}{58} \cdot 6 \\ \frac{2}{58} \cdot 6 + \frac{14}{58} \cdot 20 - \frac{10}{58} \cdot 6 \\ \frac{13}{58} \cdot 6 + \frac{4}{58} \cdot 20 - \frac{7}{58} \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{138+320+6}{58} \\ \frac{12+280-60}{58} \\ \frac{78+80-42}{58} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ответ: $x = 8, y = 4, z = 2$.

Решите систему линейных уравнений методом обратной матрицы

- 1. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 10, \\ x + 5y - 2z = -15, \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases}$ Ответ: (1,-2,3).
- 2. $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2, \\ 4x + 3y + 2z = 16, \\ 2x - 3y + z = 17. \end{cases}$ Ответ: (8,4,2).
- 3. $\begin{cases} x - 2y - z = 2, \\ 3x - 6y - 3z = 6, \\ 5x - 10y - 5z = 10. \end{cases}$ Ответ: б.м.р.
- 4. $\begin{cases} 5x - 3y + 4z = 6, \\ 2x - y - z = 0, \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$ Ответ: (1,1,1).

Литература

- 1.Дадаян, А.А. Математика: учебник/ А.А, Дадаян. – М.: Форум, 2014
- 2.Дадаян, А.А. Сборник задач по математике: учеб. пособие/ А.А. Дадаян. – М.: Форум: ИНФРА-М, 2011
- 3.Башмаков, М.И. Математика: учебник / М.И. Башмаков. – М.: Академия, 2015. – 256 с
- 4.Башмаков, М.И. Математика. Задачник: учебное пособие / М.И. Башмаков. – М.: Академия, 2014. – 416 с.
- 5.Богомолов Н.В. Математика: учеб. для ссузов. – М., 2014.
- 6.Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие для ссузов. – М., 2003.
- 7.Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов. – М., 2013.
- 8.Богомолов Н.В. Дидактический материал по математике.
5. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высшая школа, 2010
- 6.Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. - М.: Высшая школа, 2010
- 7.Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа, 2012 т.1.
- 8.Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов. М.1999.
- 9.Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. - М.1998.
- 10.Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. – М.: Дело, 2001.