МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Майкопский государственный технологический университет» в поселке Яблоновском

Политехнический колледж

Методические указания
по выполнению практических работ
по дисциплине
«Дискретная математика с элементами математической логики»
для студентов СПО

2018 год

УДК 510.6(07)
ББК 22.12
М-54

Автор:

Схаплок А.А. – преподаватель первой категории

Настоящее методическое пособие подготовлено по дисциплине «Дискретная математика с элементами математической логики». Методическое пособие полностью соответствует требованиям государственного образовательного стандарта по дисциплине. Методическое пособие предназначено для специальностей среднего профессионального образования

Практическая работа №1

Тема: Операции над множествами.
Цель. Научиться решать задачи с множествами.

Ход работы

1. Изучить основные сведения.
2. Выполнить задания.
3. Ответить на контрольные вопросы.

Основные сведения

1. Сумма (объединение) $(A \bigcup B)$. Объединением множеств A и B называется новое множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B
$C = A \bigcup B = \{x / x \in A\, или\, x \in B\}$
2. Произведение (пересечение) $(A \bigcap B)$. Пересечение множеств A и B есть новое множество C, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и A, и B
$C = A \bigcap B = \{x / x \in A \text{ и } x \in B\}$
3. Вычитание (A\B). Разностью множеств A и B называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B.
$A \setminus B = \{x / x \in A \text{ и } x \notin B\}$
4. Дополнение $(\overline{A})$. Если имеется некоторое универсальное множество U и все рассматриваемые множества есть его подмножества, то элементами множества $\overline{A}$ являются все элементы, не входящие в A, но принадлежащие U.
$\overline{A} = \{a_{\text{i}} / a_{\text{i}} \notin A\}$
5. Прямое произведение $A \times B$. Прямым произведением множеств A и B называется множество M всех пар (a, b) таких, что $a \in A, \text{b} \in \text{B}$
$M = \{(a,b) / a \in A, b \in B\}$

Основные тождества алгебры множеств.

Для любых подмножеств A, B, C универсального множества U выполняются следующие тождества.

1. $$\left.\begin{array}{l} \text{а)} A \bigcup B = B \bigcup A \\ \text{б)} A \bigcap B = B \bigcap A \end{array}\right\} -$$

2. $$a) A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$$
$$b) A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$$

3. $$a) A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$$
$$b) A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$$

4. $$a) A \bigcup \overline{A} = \mathrm{U}$$
$$\mathrm{b)} \mathrm{A} \bigcap \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{O}$$

5. $$a) A \bigcup \mathrm{O} = A$$
$$b) A \bigcap U = A$$

6. $$a) A \bigcup A = A$$
$$b) A \bigcap A = A$$

7. $$a) A \bigcup U = U$$
$$b) A \bigcap \mathrm{O} = \mathrm{O}$$

8. $$a) \overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$$
$$b) \overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$$

9. $$a) A \bigcup (A \bigcap B) = A$$
$$\mathrm{b)} A \bigcap (A \bigcup B) = A$$

Задания

1) Укажите:

a) все подмножества множества {a, b}, где $a \neq b$;

b) все собственные подмножества множества {a, b, c}, где a, b, c – попарно различные элементы.

2) Найдите:

a) $\{a,b,c\} \cap \{a,c,d,f\}$

b) $\{a,b,c\} \cup \{b,c\}$

c) $\{a,b,c,d\} \setminus \{a,f,g,k\}$

(Обозначенные различными буквами элементы - различны)

Считая, что X_1, X_2, X_3подмножества X, упростите выражение:

d) $(X_1 \cap X_2) \setminus X_1$

e) $((X_1 \setminus X_2) \cap (X_1 \cup X_2))$

f) $((X_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cap X_3)) \setminus (X_2 \cup X_3)$

3) Исходя из определений равенства множеств и операций над множествами, проверьте тождество и проиллюстрируйте решение:

a) $(A \setminus B) \setminus C = (B \setminus C) \setminus A$

б) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

c) $(C \setminus B) \cap A = (A \setminus B) \cap C$

4) Изобразите на числовой прямой пересечение, объединение и разность следующих множеств:

$X_1=\{x \,/\, x^2 - 1 \leq 0\}$ и $X_2=\{x \,/\, |\, x \,| < 1\}$

Контрольные вопросы:

1. Что такое множество?
2. Как можно задать множество?
3. Какое множество называют счетным? Какое пустым?
4. Что такое подмножество?
5. Задайте множество чисел, делящихся на 3, из интервала (10, 24].

Практическая работа 2

Тема. Логические операции над высказываниями.
Цель. Научиться определять значения логических функций и составлять таблицы истинности сложных функций.

Ход работы

1. Изучить основные сведения.
2. Выполнить задания.
3. Ответить на контрольные вопросы.

Основные сведения

Отрицанием высказывания а называется новое высказывание ($\overline{a}$ – «не а»), которое истинно, если высказывание а ложно, и ложно, если высказывание х истинно.

Таблица истинности отрицания:

а	а
1	0
0	1

Конъюнкцией двух высказываний а и b называется новое высказывание ($a \wedge b$ - «а и b»), которое истинно, тогда и только тогда, когда оба высказывания а и b истинны; во всех остальных случаях конъюнкция ложна.

Таблица истинности конъюнкции:

а	b	а b
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкцией двух высказываний а и b называется новое высказывание ($a \vee b$ - «а или b»), которое ложно, тогда и только тогда, когда оба высказывания а и b ложны; во всех остальных случаях дизъюнкция истинна.

Таблица истинности дизъюнкции:

a	b	a b
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Импликацией двух высказываний a и b называется новое высказывание ($a \to b$ - «если a, то b»), которое ложно, тогда и только тогда, когда a – истинно, b - ложно; во всех остальных случаях импликация истинна.

Таблица истинности импликации:

a	b	a b
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Эквиваленцией двух высказываний a и b называется новое высказывание ($a \leftrightarrow b$ - «атогда и только тогда, когда b»), которое истинно, тогда, когда оба высказывания либо истинны либо ложны одновременно; в остальных случаях эквиваленция ложна.

Таблица истинности эквиваленции:

a	b	a b
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Задания

Задание № 1. Какие из следующих выражений являются высказываниями:

1 вариант

а) 3>5;

б) я живу в России;

в) Y<0;

г) 2*2=4?

2вариант

а) учащиеся средней школы изучают математику;

б) y^2+ a>0 при a>0;

в) 5*7=10;

г) $(5+a^2)^2$>0?

Задание № 2. Какие из следующих импликаций истинны и почему:

а) если 2+2=4, то 3>2;	а) если 2+2=4, то 2>3
б) если 2+2=5, то 2>3;	б) если 2+2=5, то 2<3.

Задание № 3. Составьте таблицу истинности для высказываний:

а) $(A\leftrightarrow B)\to(A\vee C)$;	а) $(A\leftrightarrow B)\to(B\vee C)$;
б) $A\to(B\wedge C)$;	б) $(A\to B)\leftrightarrow(A\vee C)$.
в) $\overline{(x1\wedge x2)}\wedge x3\to x2$	в) $(x1\vee x2)\wedge\overline{x2\to x3}$
г) $(\overline{X\to Y\wedge Z})\vee\overline{X}$	г) $(x\to z)\leftrightarrow x\vee\overline{(y\wedge z)}$

Контрольные вопросы:

1. Что понимается под высказыванием?
2. Какая логическая операция называется конъюнкцией?
3. Какая логическая операция называется дизъюнкцией?
4. Перечислите основные логические операции. Составьте для них таблицы истинности

Практическая работа 3

Тема. Законы логики.
Цель. Научиться преобразовывать логические выражения, используя законы алгебры логики.

Ход работы

1. Изучить основные сведения.
2. Выполнить задания.
3. Ответить на контрольные вопросы.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

I группа. Основные равносильности ($\forall x$ справедливы следующие равносильности)

1. $x \equiv x$ — закон тождества
2. а) $x \wedge x \equiv x$; б) $x \vee x \equiv x$ — законы идемпотентности
3. $x \wedge \bar{x} \equiv 0$ — закон противоречия
4. $x \vee \bar{x} \equiv 1$ — закон исключенного третьего
5. $\bar{\bar{x}} \equiv x$ — закон двойного отрицания
6. а) $x \wedge 1 \equiv x$; б) $x \wedge 0 \equiv 0$ — законы констант
7. а) $x \vee 1 \equiv 1$; б) $x \vee 0 \equiv x$ — законы констант

II группа. Основные законы алгебры логики ($\forall x, y, z$ справедливы следующие равносильности)

8. а) $x \wedge y \equiv y \wedge x$ — закон коммутативности конъюнкции
   б) $x \vee y \equiv y \vee x$ — закон коммутативности дизъюнкции
9. а) $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$ — закон ассоциативности конъюнкции
   б) $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ — закон ассоциативности дизъюнкции
10. а) $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ — закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции
    б) $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ — закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции

11. а) $x \wedge (x \vee y) \equiv x$
б) $x \vee (x \wedge y) \equiv x$ } — законы поглощения

12. а) $(x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) \equiv x$
б) $(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) \equiv x$ } — законы склеивания

13. $x \to y \equiv \overline{y} \to \overline{x}$ — закон контрапозиции

14. $x \leftrightarrow y \equiv \overline{x} \leftrightarrow \overline{y}$ — закон двойной контрапозиции

15. $(x \wedge z) \vee (y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y) \equiv (x \wedge z) \vee (y \wedge \overline{z})$ — закон обобщенного склеивания

16. $x \vee (\overline{x} \wedge y) \equiv x \vee y$

III группа. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие ($\forall\, x, y$ справедливы следующие равносильности)

17. а) $\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$
б) $\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$ } — законы де Моргана

18. $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$

19. $\overline{x \to y} \equiv x \wedge \overline{y}$

20. $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$

Задания

1. Пользуясь законами алгебры логики, упростить следующие логические выражения:

а) $\overline{\overline{A \wedge B} \vee (C \wedge B)}$

б) $B \to (A \to B)$;

в) $(A \to A) \to A$

2. Преобразовать формулы к виду, не содержащему символы $\to$ и $\leftrightarrow$:

а) $\mathrm{x} \cdot (\mathrm{y} \to \mathrm{Z})$

б) $(A \to (B \to C)) \vee \overline{B \to A}$;

в) $\left(\overline{A \leftrightarrow \overline{B}}\right) \wedge C$

г) $\left(\overline{\overline{\mathrm{X}} \to Y}\right) \wedge \left(\overline{\overline{X} \to Z}\right)$

Контрольные вопросы:

1. Какая логическая связка соответствует дизъюнкции?
2. Какая логическая связка соответствует эквивалентности?
3. Дайте определение понятию «Рассуждение»
4. Какие формулы называются равносильными?
5. Какие формулы называются тавтологиями? Приведите пример тавтологии.

Практическая работа 4

Тема. Тождественно-истинные и тождественно-ложные формулы.
Цель. Научиться сравнивать логические функции и определять их тождественность.

Ход работы

1. Выполнить задания.
2. Ответить на контрольные вопросы.

Задания

Задание № 1. Установить при помощи таблиц истинности является ли каждая из следующих функций тавтологией, противоречием или ни тем, ни другим:

а) $\overline{A \vee (A \to B)}$;

б) $(\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y}) \leftrightarrow (\mathrm{Y} \vee \mathrm{X})$;

в) $(A \cdot B) \vee C \leftrightarrow (A \vee C) \cdot (B \vee C)$

Задание № 2. Проверить справедливость равенств:

1. A~B = (A∨B)∧(A∨B)	1. A∨B = A∧B
2. A→B = A∨B	2. A→B = A∧B
3. $(x \leftrightarrow y) \to z = (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \to z$	3. $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$

Задание №3 Составьте таблицу истинности для функций

а) $\overline{\overline{A \wedge B} \vee (C \wedge B)}$

б) $(A \to (B \to C)) \vee \overline{B \to A}$;

в) $\left(\overline{\overline{\mathrm{X}} \to Y}\right) \wedge \left(\overline{\overline{X} \to Z}\right)$

Контрольные вопросы:

1 Сформулируйте определения тождественно истинной и тождественно ложной формулы
2 Правила построения таблицы истинности
3 Какие формулы алгебры логики называются равносильными

Практическая работа 5

Тема: Представление формулы логики в виде СДНФ и СКНФ.
Цель: Научиться строить совершенную нормальную форму логической функции.

Ход работы

1. Выполнить задания, согласно варианта.
2. Ответить на контрольные вопросы

Задания

1. а) С помощью таблиц истинности проверьте, являются ли эквивалентными формулы A и B.

1 вариант

1) $A = \left(\overline{\bar{\bar{a}} \to b}\right) \vee c, \quad B = \left(\bar{a} \wedge \bar{b}\right) \vee c.$

2) $A = \left(\overline{a \to \bar{\bar{b}}}\right) \wedge c, \quad B = a \wedge b \wedge c$

2 вариант

1) $A = (a \leftrightarrow b) \vee c, \quad B = (a \to b) \vee (b \to a) \vee c$

2) $A = \left(\overline{a \to \bar{\bar{b}}}\right) \vee c, \quad B = \left(a \to \bar{b}\right) \wedge \bar{c}.$

2. Построить СДНФ и СКНФ формул по таблице истинности:

а) $x \cdot (y \to z)$

б) $(A \to (B \to C)) \vee \overline{B \to A};$

а) $\left(\overline{A \leftrightarrow \bar{\bar{B}}}\right) \wedge C$

б) $\left(\overline{\bar{\bar{X}} \to Y}\right) \wedge \left(\overline{\bar{\bar{X}} \to Z}\right)$

3. С помощью равносильных преобразований построить СДНФ и СКНФ формулы:

$\left(\overline{\bar{\bar{X}} \to Y}\right) \wedge \left(\overline{\bar{\bar{X}} \to Z}\right)$

$(A \to (B \to C)) \vee \overline{B \to A};$

4. Построить СДНФ и СКНФ логической функции по таблице истинности:

1 вариант

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1, x_1, x_1)$	0	0	1	1	0	1	0	1

2 вариант

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1, x_1, x_1)$	0	1	1	0	1	1	0	0

Контрольные вопросы:

1 Что называется элементарной конъюнкцией?
2 Что называется конъюнктивной нормальной формой логической функции?
3 Как построить СДНФ? Опишите два способа.
4 Что означает символ «↔»?
5 Какое логическое действие называется дизъюнкцией?
6 Что называется элементарной дизъюнкцией?
7 Что называется конъюнктивной нормальной формой логической функции?
8 Что называется совершенной конъюнктивной нормальной формой логической функции?
9 Как построить СКНФ? Опишите оба способа.