

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
политехнический колледж филиала федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования «Майкопский государственный
технологический университет» в поселке Яблоновском

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЕН.01 МАТЕМАТИКА
специальность
38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)
форма обучения
заочная
квалификация выпускника
бухгалтер

Одобрено предметной (цикловой) комиссией информационных и математических дисциплин
Протокол №1 от 30.08.2019 г.

Председатель предметной
(цикловой) комиссии



А.А.Схаплок

Разработчик: Кошак Р.М.–преподаватель первой категории политехнический колледж филиала федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Майкопский государственный технологический университет» в поселке Яблоновском

Содержание

1. Пояснительная записка	2
2. Содержание дисциплины по математике	3
3. Требования к выполнению и оформлению домашней контрольной работы	35
4. Варианты заданий домашней контрольной работы	36
5. Литература	45

1. Пояснительная записка

Данная методическая разработка составлена для студентов специальностей 080110 «Экономика и бухгалтер (по отраслям)» и 100801 «Товароведение и экспертиза качества потребительских товаров» заочного и очного отделения.

Цель настоящего методического указания – оказание помощи студенту в приобретении навыков решения практических задач, для выполнения индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) и домашней контрольной работы (ДКР).

Программой «Математика» предусматривается изучение вопросов о месте и роли математики в современном мире, общности её понятий и представлений; использовании математических методов при решении прикладных задач.

В пособии излагаются теоретические сведения из курса высшей алгебры, необходимые для выполнения заданий различного уровня сложности, которые сопровождаются подробным решением, что в значительной мере облегчает усвоение материала и выполнение работы.

2. Содержание дисциплины

Раздел 1. Основные понятия и методы линейной алгебры

Студент должен

знать: матрицы, действия над матрицами; решение систем линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса, методом обратной матрицы;

уметь: решать системы линейных уравнений разными методами.

иметь представление: о месте и роли математики в современном мире.

Определение. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij} , где $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов.

Определение. Суммой $A+B$ матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ размера $m \times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Определение. Произведением αA матрицы $A=(a_{ij})$ на число α называется матрица $B=(b_{ij})$, элементы которой $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.

Пример 1. Вычислить $3A+2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad 2B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2 & 9-4 \\ -3+6 & 6-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Определение. Произведением AB матрицы $A=(a_{ij})$ размера $m \times n$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размера $n \times k$ называется матрица $C=(c_{ij})$ размера $m \times k$, элемент которой c_{ij} , стоящий в i -ой строке и j -ом столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i -ой строки матрицы A и j -ого столбца матрицы B :

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj},$$
$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Так как строки и столбцы матриц участвуют в произведении AB неравноправно, то $AB \neq BA$.

Пример 2. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим элементы первой строки первой матрицы на соответствующие элементы первого столбца второй матрицы и сложим все произведения. Полученный элемент поставим в первую строку и первый столбец матрицы-произведения. Далее вычислим остальные элементы произведения матриц.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 - 4 \cdot 9 & 5 \cdot 2 - 8 \cdot 1 - 4 \cdot 6 \\ 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 - 5 \cdot 9 & 6 \cdot 2 - 9 \cdot 1 - 5 \cdot 6 \\ 4 \cdot 3 + 7 \cdot 4 - 3 \cdot 9 & 4 \cdot 2 - 7 \cdot 1 - 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -22 \\ 9 & -27 \\ 13 & -17 \end{pmatrix}.$$

Матрицу

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называют единичной. Легко проверить, что $AE=A$, если, конечно, число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы E , и $EA=A$.

Если матрица A имеет одинаковое число строк и столбцов, то ее называют квадратной.

Определение. Определителем квадратной матрицы A называется определитель, составленный из ее элементов.

Обозначают определитель матрицы A либо $\det A$ (от слова детерминант, т.е. определитель), либо $|A|$, либо D , либо Δ .

Определение. Квадратная матрица A называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрицу называют вырожденной.

Определение. Матрица A^{-1} такая, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, называется обратной матрице A .

Если A – невырожденная матрица, то существует и при этом единственная матрица, обратная к матрице A . При этом

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения к элементам исходной матрицы.

Замечание. Следует обратить внимание на то, что алгебраические дополнения к элементам строк матрицы A располагают в столбцах с теми же номерами, что и строки данной матрицы A .

Пример 3. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1(5 - 21) - 2(-3 - 6) + 1(21 + 10) = -16 - 2(-9) + 31 = 33.$$

Найдем алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 - 21 = -16, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 7) = 9,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 5 = 11,$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 6) = 9, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3,$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 10 = 31, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -(7 - 4) = -3,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 6 = -11.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{9}{33} & \frac{11}{33} \\ \frac{9}{33} & -\frac{3}{33} & 0 \\ \frac{31}{33} & -\frac{3}{33} & -\frac{11}{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

1. Решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

решается с помощью формул Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

При решении системы возможны три случая:

1. Определитель системы $\Delta \neq 0$. Тогда система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера.

2. Определитель системы $\Delta = 0$. Если при этом хотя бы один из определителей Δ_{x_1} и Δ_{x_2} не равен нулю, то система не имеет решений.

3. Если $\Delta = 0$, $\Delta_{x_1} = 0$, и $\Delta_{x_2} = 0$, то одно из уравнений есть следствие другого, система сводится к одному уравнению с двумя неизвестными и имеет бесчисленное множество решений.

Пример 1. Решить систему уравнений :
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 + 7x_2 = 81. \end{cases}$$

Решение.

Вычислим определитель системы и дополнительные определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 31,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 13 & -5 \\ 81 & 7 \end{vmatrix} = 496,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 81 \end{vmatrix} = 217.$$

Система имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{496}{31} = 16, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{217}{31} = 7.$$

Ответ: (16; 7).

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 = 8. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 48 = 44 \neq 0,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 2 = 22 \neq 0.$$

Коэффициенты уравнений системы пропорциональны, а свободные члены не подчинены той же пропорции. Система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1, \\ 3x_1 - 9x_2 = 3. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

и дополнительные определители

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то одно уравнение есть следствие другого (второе уравнение получено из первого умножением на 3).

Система сводится к одному уравнению и имеет бесчисленное множество решений, каждое из которых вычисляется по формуле: $x_1 = 1 + 3x_2$, где числовые значения x_2 задаются произвольно и вычисляются соответствующие значения x_1 .

Ответ: $x_1 = 1 + 3x_2$ – общее решение данной системы, а решения $x_2 = 1, x_1 = 4$ – частные.

2. Система из двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

Из основной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

при помощи поочередного вычеркивания столбцов получаем определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Дополнительные определители:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{13} & b_1 \\ a_{23} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Возможны три случая:

1. Если из трех определителей

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

хотя бы один не равен нулю, то система имеет бесчисленное множество решений, причем одному неизвестному можно дать любое значение. Пусть, например, отличен от нуля Δ_3 , тогда неизвестному x_3 можно придать любое значение (если $\Delta_1 \neq 0$, то x_1 , если $\Delta_2 \neq 0$, то x_2), а исходную систему переписать в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 - a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 - a_{23}x_3. \end{cases}$$

Отсюда неизвестные x_1 и x_2 определяются по формулам Крамера.

2. Все определители $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, но один из определителей,

$$\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{13} & b_1 \\ a_{23} & b_2 \end{vmatrix}$$

не равен нулю. В этом случае система несовместна, то есть не имеет решений.

3. Все выписанные определители равны нулю. Система имеет бесчисленное множество решений.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2,5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение. Основная матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

$$\Delta_3 = 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \\ = 4 \neq 0,$$

система имеет бесчисленное множество решений.

Любое значение можно придать одному из неизвестных x_2 или x_3 , так как $\Delta_2 \neq 0$ и $\Delta_3 \neq 0$. Неизвестному x_1 придать любое значение нельзя, так как $\Delta_1 = 0$.

Решим систему относительно x_1 и x_2 :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2,5 - 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 + 4x_3. \end{cases}$$
 Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Вычислим

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2,5 - 2x_3 & -1 \\ 1 + 4x_3 & 2 \end{vmatrix} = 1,5$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 2,5 - 2x_3 \\ 2 & 1 + 4x_3 \end{vmatrix} = 2x_3 - 1$$

Ответ: $x_1 = 1,5$, $x_2 = 2x_3 - 1$, $x_3 \in R$ – общее решение системы.

Система из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

При решении системы из трех уравнений с тремя неизвестными возможны три случая:

1. Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера :

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Определитель системы равен нулю, $\Delta=0$. Если при этом хотя бы один из определителей Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} , не равен нулю, то система несовместна, решений не имеет.

3. Если $\Delta=0$ и $\Delta_{x_1}=\Delta_{x_2}=\Delta_{x_3}=0$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33$$

и дополнительные определители

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33 \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33$$
$$\Delta_{x_3} = 33.$$

По формулам Крамера имеем, что

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1.$$

Ответ: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Раздел 2. Основные понятия и методы математического анализа

Студент должен

знать:

предел функции в точке; основные свойства пределов, предел функции на бесконечности; виды разрывов; общие понятия связанные с асимптотами;

уметь:

- находить предел функции в точке и на бесконечности, используя свойства пределов; находить точки разрыва функций и асимптот.

иметь представление:

- о месте и роли математики в современном мире; об основных методах вычисления пределов функции на бесконечности.

Определение предела функции. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке X^* и пусть точка $x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$.

Число A называется пределом функции $f(x)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X, x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

ПРИМЕР 1. Используя определение, доказать, что функция $f(x) = 3x - 2$ в точке $x = 1$ имеет предел, равный единице, т.е. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Задача состоит в том, чтобы по этому $\varepsilon > 0$ найти такое $\delta > 0$, при котором из неравенства $|x - 1| < \delta$ следовало бы неравенство $|f(x) - 1| = |(3x - 2) - 1| < \varepsilon$. Преобразуя последнее неравенство, получаем $|3(x - 1)| < \varepsilon$, или $|x - 1| < \varepsilon/3$. Отсюда видно, что если взять $\delta \leq \varepsilon/3$, то для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - 1| < \delta$, выполняется неравенство

·Свойства пределов

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы B и C . Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, и $f(x) / g(x)$ имеют в точке x_0 пределы, равные соответственно $B \pm C$, $B \cdot C$, B/C , т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = B \pm C$, $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = B \cdot C$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) / g(x)] = B / C.$$

Замечание. Теорема верна также и в случае, когда x_0 является одним из символов $-\infty, +\infty, \infty$.

ПРИМЕР 2. а) Найти $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x + 5)$

Решение. На основании выше изложенной теоремы, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x + 5) = \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 5 = 3 \cdot 1^2 + 1 + 5 = 9.$$

б) Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x}$

Решение. Пределы числителя и знаменателя $x \rightarrow 3$ равно нулю:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 6) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 - 9x) = 3 \cdot 3 - 9 \cdot 3 = 0.$$

Разложим квадратный трехчлен в числителе на линейные множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни трехчлена. Разложив на множители и знаменатель, сократим дробь на $x-3$. Используя следствие 4, получим

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{3x} = \frac{3-2}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}.$$

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0$ (a – любое число).
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (a \cdot x) = \infty$ (a – любое число).
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (a \pm x) = \infty$ (a – любое число).

ПРИМЕР 3. Найти $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^3 + 8}$.

Решение. Имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Непосредственно теорему применить нельзя. Необходимо, как говорят, раскрыть эту неопределенность. Для этого разложим числитель на множители и сократим на общий множитель $x+2$, который обращает в нуль знаменатель и числитель дроби. Получаем

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+4)}{(x^2 - 2x + 4)}$$

Так как знаменатель теперь не равен нулю, то неопределенность $\frac{0}{0}$ раскрыта.

$$\text{Имеем } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+4)}{(x^2 - 2x + 4)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (x+4)}{\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4)} = \frac{-2+4}{(-2)^2 - 2(-2) + 4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

ПРИМЕР 4. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x-1}}$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x-1}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x^2 - 25)(2 + \sqrt{x-1})}{(2 - \sqrt{x-1})(2 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x^2 - 25)(2 + \sqrt{x-1})}{4 - (x-1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)(2 + \sqrt{x-1})}{-(x-5)} = - \lim_{x \rightarrow 5} (x+5)(2 + \sqrt{x-1}) = -10 \cdot 4 = -40.$$

Точки разрыва функции. Асимптоты

Определение. Если функция $y = f(x)$ при $x = a$ имеет разрыв, то для выяснения характера разрыва следует найти предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ слева и справа.

В зависимости от характера поведения функции в окрестности точки разрыва различают два основных вида разрывов:

1) *разрыв 1 рода* – в этом случае существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ и

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x);$$

2) *разрыв 2 рода* – в этом случае хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$

не существует или бесконечен.

ПРИМЕР 5. Для заданной функции найти точки разрыва и исследовать их

характер: $y = \frac{x}{x-3}$.

Решение. Данная функция определена при всех значениях x , кроме $x=3$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения. Таким образом, единственной точкой разрыва служит точка $x=3$. Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы функции при $x \rightarrow 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x}{x-3} = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x}{x-3} = +\infty.$$

Следовательно функция $y = \frac{x}{x-3}$ в точке $x=3$ имеет бесконечный разрыв, т.е.

$x=3$ – точка разрыва второго рода.

Определение. Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее, от начала координат.

Различают вертикальные, горизонтальные, и наклонные асимптоты.

Вертикальные асимптоты. График функции $y=f(x)$ при $x \rightarrow a$ имеет вертикальную асимптоту, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$; при этом точка $x=a$ есть точка разрыва второго рода. Уравнение вертикальной асимптоты имеет вид $x = a$ (рис.3).

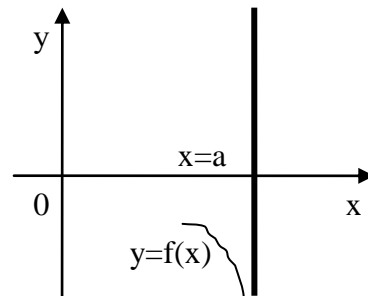
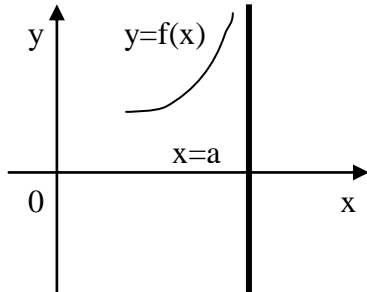


рис.3

Горизонтальные асимптоты. График функции $y=f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ или при $x \rightarrow -\infty$ имеет горизонтальную асимптоту, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b_1$.

Может оказаться, что либо только один из этих пределов конечный, либо ни одного, тогда график имеет или одну вертикальную асимптоту, или ни одной. Уравнение горизонтальной асимптоты имеет вид $y = b$ (рис.4).

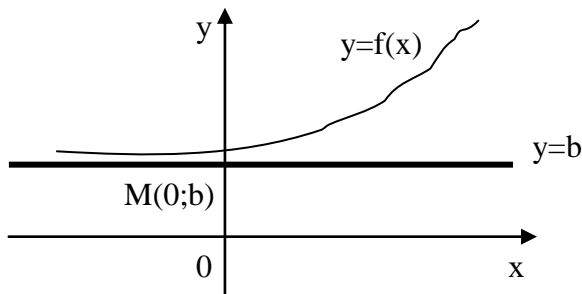


рис.4

Наклонные асимптоты. Пусть график функции $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$. В этом случае справедливо равенство

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx - b] = 0$. Вынося x за скобки, получим $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$. Так как

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{b}{x} \right] = 0$, то отсюда получаем формулы для вычисления параметров k и b :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = k \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = b$$

ПРИМЕР 6. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x+5}{x-3}$.

Решение. Точка $x = 3$ - точка разрыва второго рода данной функции, причем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3-0 \\ (x \rightarrow 3+0)}} \frac{x+5}{x-3} = -\infty(+\infty); \text{ следовательно, прямая } x = 3 \text{ - вертикальная}$$

асимптота.

Так как $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{x(x-3)} = 0$, график функции наклонных асимптот не имеет.

Находим горизонтальную асимптоту: $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{x+5}{x-3} = 1$. Таким образом, график

данной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение предела функции в точке.

2. Перечислить основные свойства пределов.

3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -1} (4x^3 - \frac{x^2}{5} + 3)$

4. Как раскрывается неопределенность вида $\frac{0}{0}$?

5. Как раскрывается неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$?

6. Когда мы можем сказать, что функция имеет разрыв первого рода?

7. Когда мы можем сказать, что функция имеет разрыв второго рода?

8. Какие типы асимптот вы знаете?

Раздел 3. Дифференциальное и интегральное исчисление

Студент должен

знать:

- понятие производной и дифференциала, геометрический и физический смысл производной, правила дифференцирования;

уметь:

- находить производную первого и второго порядка, производную сложной функции, используя правила дифференцирования;

иметь представление:

- о методах решения прикладных задач с помощью производной.

Методические указания

Приступая к выполнению контрольной работы необходимо изучить определение производной функции, правила дифференцирования. Изложим только основные понятия связанные с производной.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента $\Delta x = (x_0 + \Delta x) - x_0$, когда последнее стремится к нулю. Обозначается производная функции $y' = f'(x)$.

Итак, имеем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Геометрический смысл

Определение. Производная функции $y = f(x)$ при данном значении аргумента $x = x_1$ равна угловому коэффициенту касательной (k) проведенной к графику этой функции в точке, абсцисса которой равна x_1 : $y' = \operatorname{tg} \alpha$, или $y' = k$

ПРИМЕР 7. Дана кривая $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x$. Найти наклон этой кривой в точке, абсцисса которой равна 6.

Решение. Найдем производную этой кривой: $y' = \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x\right)' = \frac{1}{2}x - 2$.

При $x = 6$ получим $k = y'(6) = \frac{1}{2} \cdot 6 - 2 = 1 = \operatorname{tg} \alpha$.

Физический смысл

Определение. Средняя скорость изменения функции y для промежутка значений аргумента от x до $x + \Delta x$ выражается отношением

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ показывает, сколько единиц приращения функции приходится на единицу приращения аргумента.

Мгновенная (или истинная) скорость изменения функции при данном значении

x есть предел, к которому стремится средняя скорость $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ в

промежутке изменения аргумента от x до $x + \Delta x$, т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Для линейной функции $y = kx + b$ средняя скорость $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ и истинная скорость $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ совпадают по величине и численное значение истинной скорости равно коэффициенту k .

ПРИМЕР 8. Найти среднюю скорость изменения функции $y=3x^2 - 6$ при изменении x от $x_1=3$ до $x_2=3,5$.

Решение. Найдем приращение аргумента: $\Delta x = x_2 - x_1 = 3,5 - 3 = 0,5$

Определим значения функции при x_2 и x_1 : $y_1 = 3 \cdot 3^2 - 6 = 21$, $y_2 = 3 \cdot (3,5)^2 - 6 = 30,75$

Вычислим приращение функции: $\Delta y = y_2 - y_1 = 30,75 - 21 = 9,75$.

Находим среднюю скорость изменения функции: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9,75}{0,5} = 19,5$.

Основные правила дифференцирования

Если C - постоянное число, $u=u(x)$, $v=v(x)$ - функции, имеющие производные, тогда:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(Cu)' = Cu'$
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

Формулы дифференцирования основных функций

(дифференцирование функции)

При условии $u = \varphi(x)$	При условии $u = x$
$(u^n)' = nu^{n-1}u'$	$C' = 0$
где n – любое действительное число	$X' = 1$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}u'$	$(x^n)' = nx^{n-1}x'$
$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$	где n – любое действительное число
$(\ln u)' = \frac{1}{u}u'$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}x'$
	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}x'$
	$(\ln x)' = \frac{1}{x}x'$

$(\lg u)' = \frac{0,4343}{u} u'$	$(\lg x)' = \frac{0,4343}{x} x'$
$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	$(a^x)' = a^x \ln a \cdot x'$
$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(e^x)' = e^x \cdot x'$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\sin x)' = \cos x \cdot x'$
$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	$(\cos x)' = -\sin x \cdot x'$
$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x'$
$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot x'$
$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', u < 1$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x',$
$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', u < 1$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x', x < 1$
$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot x'$
$(\operatorname{arctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	$(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \cdot x'$

ПРИМЕР 9. Найти производные функций: 1) $f(x) = 5 + x^3 + 3x^2 + \sin x + 2\operatorname{tg} x$;

2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; 3) $f(x) = x \sin x$.

Решение.

$$1) f'(x) = (5 + x^3 + 3x^2 + \sin x + 2\operatorname{tg} x)' = (5)' + (x^3)' + (3x^2)' + (\sin x)' + (2\operatorname{tg} x)' = 3x^2 + 6x + \cos x + 2 / \cos^2 x$$

$$2) f'(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(x^2 - 1)'(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$3) f'(x) = (x \sin x)' = (x)' \sin x + (\sin x)' x = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x.$$

ПРИМЕР 10. Найти производную функции: $y = (3 + x^3) \cdot (\ln x - x^2)$

Решение.

$$y' = ((3 + x^3) \cdot (\ln x - x^2))' = (3 + x^3)' \cdot (\ln x - x^2) + (\ln x - x^2)' \cdot (3 + x^3) =$$

$$= 3x^2 \cdot (\ln x - x^2) + \left(\frac{1}{x} - 2x\right) \cdot (3 + x^3)$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Определение производной функции
2. В чем заключается геометрический смысл производной?
3. В чем заключается физический смысл производной?

Производные обратных тригонометрических функций

ПРИМЕР 11. Найти производную функции $f(x) = \arcsin 2x$, вычислить $f'(-1/4)$.

Решение.

$$f'(x) = (\arcsin 2x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} (2x)' = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$f'(-1/4) = \frac{2}{\sqrt{1-4(-1/4)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-1/4}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

ПРИМЕР 12. Найти производную функции: $y = (3 + \arcsin x) \cdot (2 \arccos x - 7)$

Решение.

$$y' = ((3 + \arcsin x) \cdot (2 \arccos x - 7))' =$$

$$= (3 + \arcsin x)' \cdot (2 \arccos x - 7) + (2 \arccos x - 7)' \cdot (3 + \arcsin x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (2 \arccos x - 7) - \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) \cdot (3 + \arcsin x).$$

Производная сложной функции

Если имеется сложная функция $y = f[h(x)]$, то $y'_x = f'_h(h) \cdot h'_x(x)$ – производная сложной функции.

ПРИМЕР 13. Найти производные сложных функций: 1) $f(x) = \cos^6(3x^2 - 5)$;

2) $f(x) = \ln(x - \sqrt{1+x^2})$.

Решение.

1) Если обозначим функцию $\cos(3x^2 - 5) = u$, то для нахождения производной используем формулу $(u^n)' = nu^{n-1}u'$, где $n=6$, тогда получим

$$f'(x) = (\cos^6(3x^2 - 5))' = 6 \cdot \cos^5(3x^2 - 5) \cdot (\cos(3x^2 - 5))'$$

Теперь обозначим $3x^2 - 5 = t$ и воспользуемся формулой $(\cos t)' = -\sin t \cdot t'$, получим

$(\cos(3x^2 - 5))' = -\sin(3x^2 - 5) \cdot (3x^2 - 5)' = -\sin(3x^2 - 5) \cdot 6x$, подставим в искомую производную функции:

$$f'(x) = 6 \cdot \cos^5(3x^2 - 5) \cdot (-\sin(3x^2 - 5)) \cdot 6x = -36x \cdot \cos^5(3x^2 - 5) \cdot \sin(3x^2 - 5)$$

2) Аналогично рассмотренному примеру обозначим $x - \sqrt{1+x^2} = u$, тогда

$$f'(x) = (\ln u)' = \frac{1}{u} u', \text{ получим}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\ln(x - \sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{x - \sqrt{1+x^2}} (x - \sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{x - \sqrt{1+x^2}} \cdot (1 - \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+x^2)') = \\ &= \frac{1}{x - \sqrt{1+x^2}} \cdot (1 - \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x) = \frac{1}{x - \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{(1-x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{(1-x)}{|1+x^2|} \end{aligned}$$

Производные высших порядков

Производная $f'(x)$ называется *производной первого порядка*. Производная от $f'(x)$ называется *производной второго порядка (или второй производной)* от функции $f(x)$ и обозначается y'' или $f''(x)$. Производная от $f''(x)$ называется *производной третьего порядка (или третьей производной)* от функции $f(x)$ и обозначается y''' или $f'''(x)$ и т.д.

Производная n -го порядка есть производная от производной $(n-1)$ -го порядка, т.е. $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Производные начиная со второго порядка называются *производными высшего порядка*.

ПРИМЕР 14. Найти производную второго порядка от функции $y = \operatorname{tg} x$

Решение.

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = \frac{(1) \cdot \cos^2 x - (\cos^2 x) \cdot 1}{\cos^4 x} = \frac{-2 \cos x (-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2 \cos x \sin x}{\cos^4 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

Вопросы самоконтроля:

1. Как найти производную сложной функции.
2. Как найти производную второго и третьего порядка.
3. Перечислите основные формулы дифференцирования.

Возрастание и убывание функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке $]a, b[$, если для любых x_1 и x_2 , принадлежащих этому промежутку и таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.



Определение. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на промежутке $]a, b[$, если для любых x_1 и x_2 , принадлежащих этому промежутку и таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Как возрастающие, так и убывающие функции называются *монотонными*, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает, - *промежутками монотонности*.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной: если в некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция *возрастает* в этом промежутке; если же $f'(x) < 0$, то функция *убывает* в этом промежутке.

ПРИМЕР 15. Найти промежутки монотонности следующей функции $f(x) = x^2 - 8x + 12$.

Решение. Находим производную $f'(x) = 2x - 8$; имеем $2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Исследуем знак производной на интервалах $] -\infty, 4[$ и $] 4, +\infty[$ методом пробных точек. Последующие рассуждения представим в таблице.

x	$] -\infty, 4[$	4	$] 4, +\infty[$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Таким образом, данная функция в промежутке $] -\infty, 4[$ убывает, а в промежутке $] 4, +\infty[$ возрастает.

Вопросы самоконтроля:

1. Какая функция называется возрастающей?
2. Какая функция называется убывающей?
3. Какие функции называются монотонными?

Исследование функций на экстремум

Исследование функции на экстремум с помощью первой производной.

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти критические точки 1 рода функции $y = f(x)$, т.е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.
3. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические значения точки делят область определения функции $y = f(x)$. При этом критическая точка x_0 есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка в котором $f'(x) > 0$, и точка максимума – в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой x_0 , знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.
4. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Исследование функции на экстремум с помощью второй производной.

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные точки данной функции $y = f(x)$, т.е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль.
3. Найти вторую производную $f''(x)$.
4. Исследовать знак второй производной в каждой из стационарных точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то минимум. Если же вторая производная равна нулю, то экстремум функции надо искать с помощью первой производной.
5. Вычислить значения функции в точках экстремума.

ПРИМЕР 16. Исследовать на экстремум с помощью второй производной функцию $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$.

Решение. Следуем пунктам правила:

1. Находим производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24;$$

$$2. (3x^2 - 18x + 24 = 0) \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 8 = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 4. \end{cases}$$

3. Найдем $f''(x) = 6x - 18$.

4. Определим знак второй производной в критических точках. Так как $f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 < 0$, то при $x=2$ функция имеет максимум; так как $f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 > 0$, то при $x=4$ функция имеет минимум.

5. Вычислим значение функции в точках экстремума:
 $f_{\max} = f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 12 = 8$, $f_{\min} = f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 12 = 4$.

Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется **выпуклым** на интервале (a, b) , если дуга кривой на этом промежутке расположена ниже касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в любой точке $x \in (a, b)$.

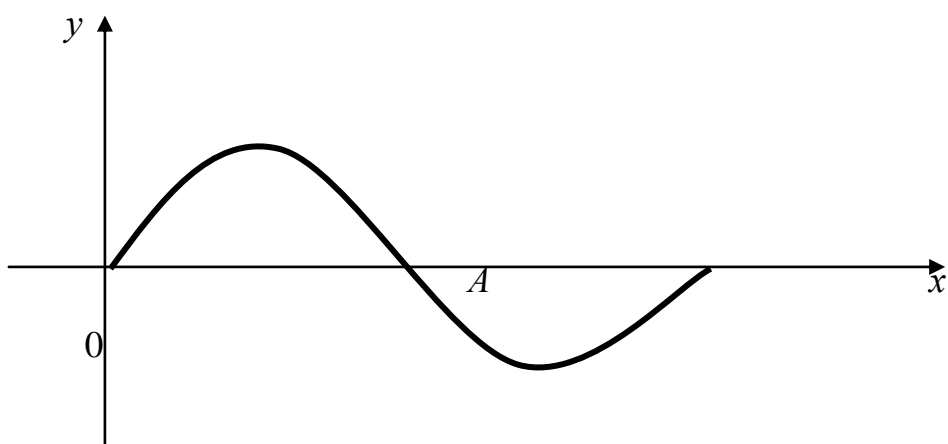
Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется **вогнутым** на интервале (a, b) , если дуга кривой на этом промежутке расположена выше касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в любой точке $x \in (a, b)$.

Кривая выпукла (вогнута) в некотором промежутке, если она выпукла (вогнута) во всех точках этого промежутка.

Промежутки выпуклости и вогнутости кривой можно находить с помощью производной.

Определение. Если вторая производная функции $y = f(x)$ в данном промежутке положительна, то кривая вогнута в этом промежутке, а если отрицательна – выпукла в этом промежутке.

Как уже отмечалось, иногда кривая в одной своей части выпукла, а в другой вогнута; так, например, часть синусоиды выпукла выше оси Ox и вогнута ниже оси Ox , причем точка A служит границей между ними. Эта точка носит название точки перегиба.



Определение. Точкой перегиба кривой называется такая точка, которая отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой.

Правила исследования функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба

1. Найти вторую производную функции $f''(x)$.
2. Найти точки, в которых вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует.
3. Исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах выпуклости и вогнутости, и наличии точек перегиба.
4. Найти значения функции в точках перегиба.

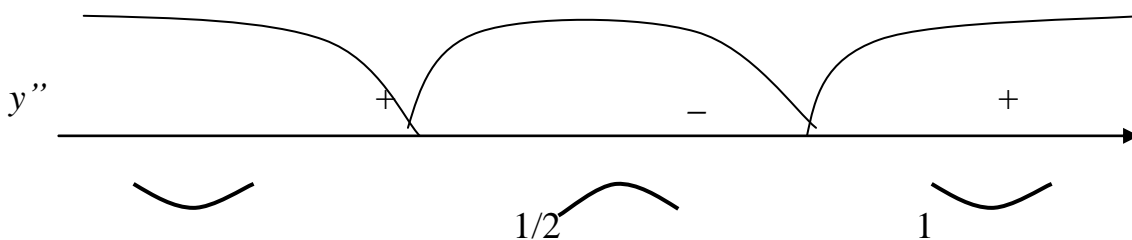
ПРИМЕР 17. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции

$$y = x(x-1)^3.$$

Решение. 1. Найдем первую, а затем и вторую производную данной функции

$$y'' = 12(x-1)(x-1/2).$$

2. Найдем критические точки $y'' = 0$ при $x_1 = 1/2$ и $x_2 = 1$.
3. Разбиваем область определения функции на промежутки критическими точками и исследуем знак второй производной :



$y'' > 0$ на интервалах $(-\infty, 1/2)$ и $(1, +\infty)$, следовательно, на этих интервалах функция вогнута; $y'' < 0$ на интервале $(1/2, 1)$, следовательно, функция на нем выпукла, а $x_1 = 1/2$ и $x_2 = 1$ есть точки перегиба.

4. Значения функции в точках перегиба $f(1/2) = -1/16$, $f(1) = 0$.

Вопросы самоконтроля:

1. Как исследовать функцию на экстремум с помощью первой производной?
2. Как исследовать функцию на экстремум с помощью второй производной?

Исследование функции с помощью производной

Изучение заданной функции и построение её графика целесообразно проводить в следующем порядке:

- 1) найти область определения функции;
- 2) найти точки пересечения графика функции с осями координат;
- 3) найти асимптоты;
- 4) найти точки возможного экстремума;
- 5) найти критические точки;
- 6) с помощью вспомогательного рисунка исследовать знак первой и второй производных. Определить участки возрастания и убывания функции, найти направление выпуклости графика, точки экстремума и точки перегиба;
- 7) построить график, учитывая исследование, проведенное в п. 1)-6).

ПРИМЕР 18. Построить по изложенной выше схеме график функции $f(x) =$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Решение.

- 1) областью определения функции является множество всех вещественных чисел, кроме $x = 1$ (в этом случае знаменатель обращается в нуль).
- 2) так как уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет вещественных корней, то график функции не имеет точек пересечения с осью Ox , но пересекает ось Oy в точке $(0; -1)$.
- 3) выясним вопрос о существовании асимптот. Исследуем поведение функции вблизи точки разрыва $x = 1$. Так как $y \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow 1^-$, $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 1^+$, то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Если $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), то $y \rightarrow +\infty$ ($y \rightarrow -\infty$); следовательно, горизонтальной асимптоты у графика нет. Далее из существования пределов

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 1/x^2}{1 - 1/x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 1/x}{1 - 1/x} = 1$$

вытекает, что при $x \rightarrow \infty$ график функции имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$.

4) для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную функции:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

Решая уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$, получаем две точки возможного экстремума:

$$x_1 = 1 - \sqrt{2} \text{ и } x_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

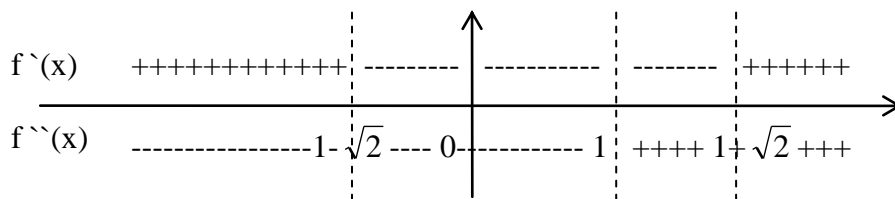
5) для нахождения критических точек вычислим вторую производную:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

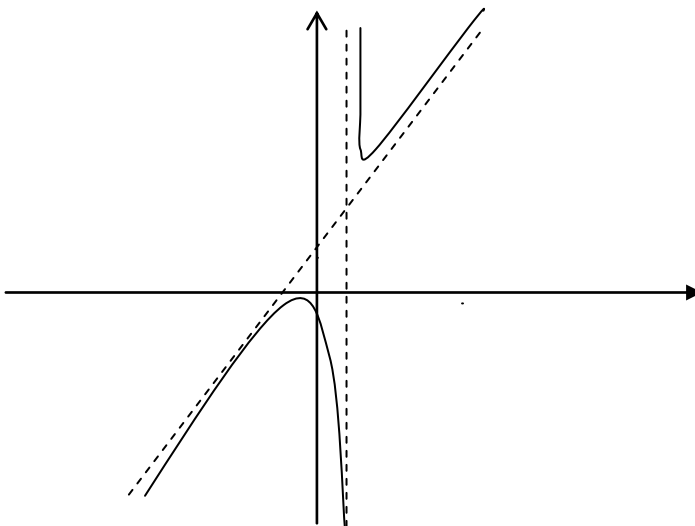
Так как $f''(x)$ в нуль не обращается, то критических точек нет.

6) Строим вспомогательный рисунок и исследуем знак первой и второй производной. Точки возможного экстремума, подлежащие рассмотрению:

$x_1 = 1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, - разделяют область существования функции на интервалы: $(-\infty, 1 - \sqrt{2})$, $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ и $(1 + \sqrt{2}, +\infty)$.



В каждом из этих интервалов производная сохраняет знак: в первом – плюс, во втором – минус, в третьем – плюс. Получаем, что функция на $(-\infty, 1 - \sqrt{2})$ и $(1 + \sqrt{2}, +\infty)$ возрастает, а на $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ – убывает. Точки экстремума: максимум при $x = 1 - \sqrt{2}$, причем $f(1 - \sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$; минимум при $x = 1 + \sqrt{2}$, причем $f(1 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$. На $(-\infty, 1)$ график направлен выпуклостью вверх, а на $(1, +\infty)$ - вниз. 7) по полученным данным строим эскиз графика



ПРИМЕР 19. Построить график функции $f(x) = x^3 - 12x + 4$.

Решение. 1) Область определения $(-\infty, +\infty)$. Функция непрерывна во всей области определения.

2) Если $x = 0$, то $y = 4$, т.е. график функции пересекает ось ординат в точке $(0, 4)$.

3) Асимптот график функции не имеет (проверьте самостоятельно).

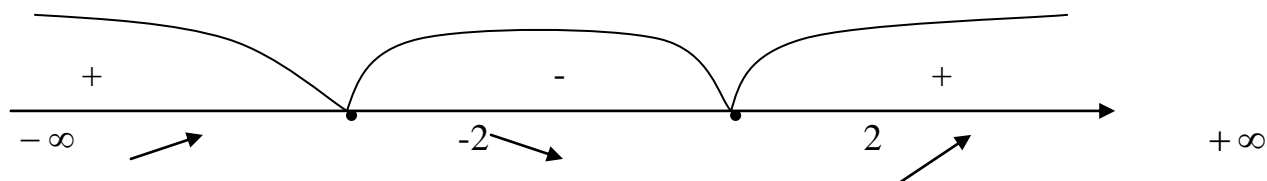
4) Находим интервалы монотонности, для этого найдем производную функции $f'(x) = 3x^2 - 12$, приравняем ее к нулю.

$3x^2 - 12 = 0$, $3(x - 2)(x + 2) = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ - это критические точки функции. Область определения функции разделим на промежутки критическими точками и исследуем каждый промежуток:

$(-\infty, -2) - y'(-3) = 3(-3)^2 - 12 = 15 > 0$ - функция возрастает;

$(-2, 2) - y'(0) = 3(0)^2 - 12 = -12 < 0$ - функция убывает;

$(2, +\infty) - y'(3) = 3(3)^2 - 12 = 15 > 0$ - функция возрастает

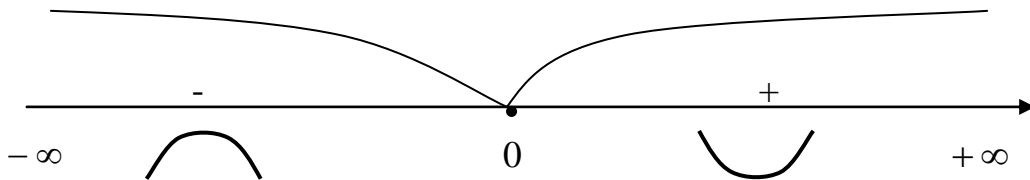


Исследуем функцию на экстремум. Из п.4 видно, что при $x = -2$ функция имеет максимум:

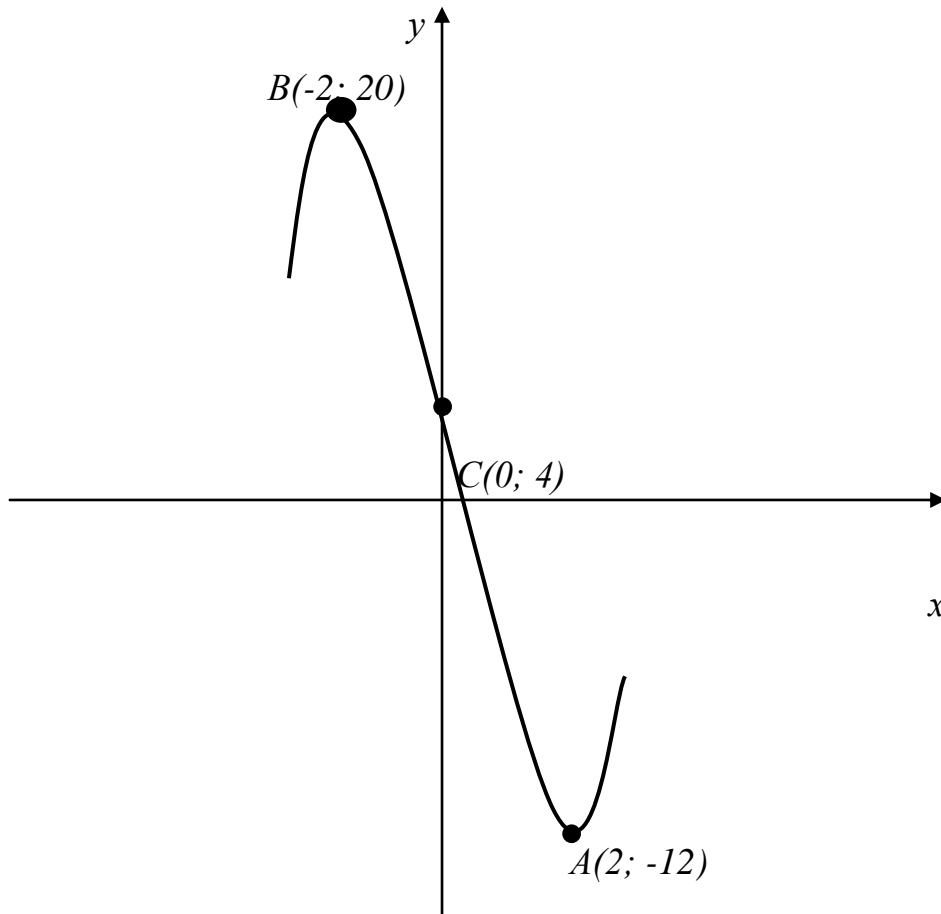
$y(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 4 = 20$, а при $x = 2$ - минимум: $y(2) = 2^3 - 12 * 2 + 4 = -12$.

5) Находим $f''(x) = (3x^2 - 12)' = 6x$; $6x = 0$; $x = 0$. Определим знаки второй производной слева и справа от точки $x = 0$: $y''(-1) = -6 < 0$;

$y''(1) = 6 > 0$. Следовательно, в промежутке $(-\infty, 0)$ кривая выпукла, а в промежутке $(0, +\infty)$ - вогнута. При $x = 0$ имеем точку перегиба; ее ордината $y = 0 - 12 * 0 + 4 = 4$ (рис. 14).



6) Построим график функции



Вопросы самоконтроля:

1. Какая функция называется возрастающей (убывающей)
2. Перечислите основные пункты исследования и построения графика функции.

Интегрирование

Определение. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

при этом функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, а переменная x – переменной интегрирования.

Основные свойства неопределенного интеграла.

$$1. (f(x)dx)' = f(x)$$

$$2. d \int f(x)dx = f(x)dx \qquad 3. \int dF(x) = F(x) + C$$

$$4. \int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$5. \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Таблица основных интегралов

$$1. \int 0dx = C$$

$$2. \int dx = x + C$$

$$3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1)$$

$$6. \int e^x dx = e^x + C$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$12. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

ПРИМЕР 20. Найти следующие интегралы **а)** $\int 6x^2 dx$

Решение. Используя свойства и формулы интегрирования, получим

$$\int 6x^2 dx = 6 \int x^2 dx = 6 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = 2x^3 + C.$$

Проверка: $d(2x^3 + C) = 6x^2 dx$. Получили подынтегральное выражение; следовательно, интеграл найден правильно.

б) $\int 4(x^2 - x + 3)dx$

Решение. Используя свойства 3^0 и 4^0 и формулы таблицы интегралов, имеем

$$\int 4(x^2 - x + 3)dx = 4 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 12 \int dx = 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 12x + C = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C.$$

Постоянная интегрирования C равна алгебраической сумме трех постоянных

интегрирования, так как каждый интеграл имеет свою произвольную постоянную

$$(C_1+C_2+C_3=C).$$

Вопросы самоконтроля:

1. Дать определение неопределенного интеграла.
2. Что называется первообразной функции?
3. Перечислите основные свойства интегралов.

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

ПРИМЕР 21. Вычислить интеграл $\int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} \right) dx$

Решение. Применяя свойства 4 и 5, имеем

$$\int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} \right) dx = 5 \int \cos x dx + 2 \int dx - 3 \int x^2 dx + \int \frac{dx}{x}$$

Далее, используя формулы таблицы основных интегралов, находим каждый интеграл полученной алгебраической суммы:

$$5 \int \cos x dx = 5(\sin x + C_1) = 5 \sin x + 5C_1$$

$$2 \int dx = 2x + 2C_2$$

$$3 \int x^2 dx = 3 \left(\frac{x^{2+1}}{2+1} + C_3 \right) = x^3 + 3C_3$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_4$$

Таким образом, имеем

$$\int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} \right) dx = 5 \sin x + 2x - x^3 + \ln x + C$$

2. Метод подстановки

ПРИМЕР 22. Вычислить интеграл $\int \cos 3x dx$.

Решение. Интеграл не табличный. Применяем подстановку $t = 3x$, тогда

$$dt = (3x)' dx = 3dx, dx = 1/3 dt. \text{ Подставив в интеграл получаем: } \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos t dt.$$

- табличный интеграл. Применяя формулу таблицы основных интегралов,

находим $\frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + C$. Возвращаясь к переменной x , окончательно

$$\text{получаем } \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + C.$$

3. Интегрирование по частям: Используем формулу $\int u dv = uv - \int v du$

ПРИМЕР 23. Найти следующие интегралы:

а) $\int x \sin x dx$

Решение. Положим $u=x$, $dv=\sin x dx$; тогда $du=dx$, $\int dv = \int \sin x dx$, т.е. $v=-\cos x$.

Используя формулу (11.14), получим

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

б) $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$

Решение. Положим $u=\ln x$, $dv = \frac{dx}{x^2}$; тогда $du = \frac{dx}{x}$, $\int dv = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x}$; $v = -\frac{1}{x}$.

По формуле (11.14) получим $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x} \frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$.

Вопросы и задания для самопроверки:

1. Объяснить в чем заключается метод замены переменной.
2. Напишите формулу интегрирования по частям.
3. Вычислите интеграл.

Определенный интеграл

Определение. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю.

Для вычисления определенного интеграла служит формула Ньютона – Лейбница, где определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ - формула Ньютона – Лейбница}$$

ПРИМЕР 24. Вычислить интегралы

а) $\int_a^b \sin x dx$

Решение. Так как одной из первообразных для функции $f(x) = \sin x$ является функция $F(x) = -\cos x$, то применяя формулу Ньютона – Лейбница, получаем

$$\text{a) } \int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b \qquad \text{б) } \int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx .$$

Решение. По формуле Ньютона – Лейбница получаем.

$$\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^2 = \left[\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 2 \right] - \left[\frac{1}{3} (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) \right] = 9 .$$

$$\text{в) } \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$$

Решение. Воспользуемся методом подстановки

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx = \left[\begin{array}{l} x^2 = t \\ x^4 = t^2 \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{dt}{2} \\ t_n = 0 \\ t_e = 1 \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{dt/2}{1+t^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \cdot (\arctg t \Big|_0^1) =$$

$$= \frac{1}{2} (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{\pi}{8}$$

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Дайте определение определенного интеграла.
2. Как выглядит формула Ньютона – Лейбница.
3. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/4} \cos 2x dx$.

Приложения определенного интеграла.

Определение. Если криволинейная трапеция, ограничена кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, лежит под осью Ox , то формула для нахождения

$$\text{площади плоской фигуры } S = \int_a^b f(x) dx$$

Рассмотрим геометрический смысл интеграла на конкретном примере.

ПРИМЕР 25.

а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$$y = -6x, y = 0 \text{ и } x = 4.$$

Решение. Фигура расположена под осью Ox , следовательно ее площадь

находим по формуле: $S = \left| -\int_0^4 6x \right| = \left| [-3x^2]_0^4 \right| = |-48| = 48(\text{кв.ед.})$

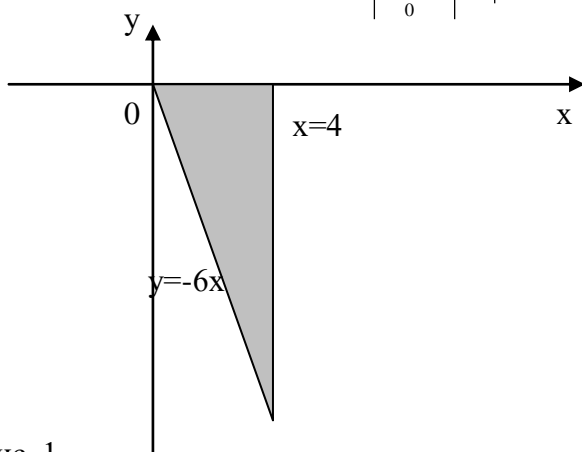


Рис. 1

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями: $y=-x^2+4$ и $y=0$.

Решение. Выполним построение фигуры рисунок 2. Искомая площадь заключена между параболой $y=-x^2+4$ и осью Ox . Найдем точки пересечения параболы с осью Ox . Полагая $y=0$, найдем $x=\pm 2$. Так как данная фигура симметрична относительно оси Oy , то вычислим площадь фигуры, расположенной справа от оси Oy , и полученный результат удвоим:

$$S_1 = \int_0^2 (-x^2 + 4)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^2 = 5\frac{1}{3}(\text{кв.ед.});$$

$$S = 2S_1 = 2 \cdot 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}(\text{кв.ед.}).$$

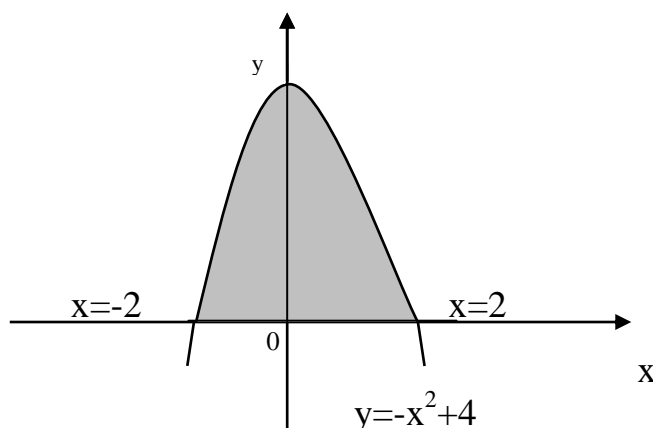


Рис.2

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Определение производной функции
2. В чем заключается геометрический смысл производной?
3. В чем заключается физический смысл производной?

4. Как найти производную сложной функции.
5. Как найти производную второго и третьего порядка.
6. Перечислите основные формулы дифференцирования.
7. Какая функция называется возрастающей?
8. Какая функция называется убывающей?
9. Какие функции называются монотонными?
10. Перечислите основные пункты исследования и построения графика функции.
11. Дать определение неопределенного интеграла.
12. Что называется первообразной функции?
13. Перечислите основные свойства интегралов.
14. Объяснить в чем заключается метод замены переменной.
15. Напишите формулу интегрирования по частям.
16. Вычислите интеграл
17. Дайте определение определенного интеграла.
18. Как выглядит формула Ньютона – Лейбница.
19. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/4} \cos 2x dx$
20. Запишите формулу нахождения площади плоской фигуры
21. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$.

3. Требования к выполнению и оформлению домашней контрольной работы по математике

Контрольная работа оформляется в тонкой тетради чернилами любого цвета (кроме красного). Для замечаний рецензента оставляются поля. На обложке тетради указываются: фамилия, имя, отчество студента, его учебный шифр (серия и номер зачетной книжки), домашний адрес, а также наименование дисциплины и номер контрольной работы (см. приложение 1)

Решения задач следует располагать в порядке следования номеров, указанных в задании, сохраняя номера задач и записывая исходные условия.

Приступая к выполнению контрольной работы, необходимо изучить теоретический материал и ознакомиться с решением типовых задач. Решения задач контрольной работы следует оформлять аккуратно, подробно объясняя ход решения, записывать используемые формулы. В конце работы необходимо привести список использованной литературы, указать дату выполнения работы и поставить свою подпись.

После получения проверенной работы необходимо исправить в ней отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. Работа над ошибками, как правило, делается в той же тетради, что и контрольная работа.

4. Варианты заданий домашней контрольной работы

Выбор задач для контрольной работы осуществляется в соответствии с вариантом, номер которого совпадает с последней цифрой учебного шрифта студента.

Варианты заданий

Вариант	Номера задач, входящих в контрольную работу					
1	1	11	21	31	41	51
2	2	12	22	32	42	52
3	3	13	23	33	43	53
4	4	14	24	34	44	54
5	5	15	25	35	45	55
6	6	16	26	36	46	56
7	7	17	27	37	47	57
8	8	18	28	38	48	58
9	9	19	29	39	49	59
10	10	20	30	40	50	60

Задание №1. Решить системы уравнения: а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера; в) методом Гаусса

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 + 6 = 0, \\ x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$	7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0. \end{cases}$	8. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$
4. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 6 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$	9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$	10. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$
---	---

Задание №2. Вычислить пределы следующих функций:

1. a) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 - 6x^2 + x - 5)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x}$	6. a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - x^2 + 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x}$
2. a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x - 5)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{5x + 1}$	7. a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)(x - 3)(x - 5)$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$
3. a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - x^2 + 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x}$	8. a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x - 5)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{5x + 1}$
4. a) $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - 5x^2 + x - 4)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x - 2}$	9. a) $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - 5x^2 + x - 4)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x - 2}$
5. a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - x^2 + 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x}$	10. a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x - 5)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{5x + 1}$

Задание №3. Найти производные следующих функций:

1. а) $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} + 4,$ б) $y = \frac{x * \operatorname{tg} x}{1 + x^2}.$	6. а) $y = 3\sqrt{x} + \frac{6}{x^2} - 5 \operatorname{ctg} x,$ б) $y = \frac{2x * \operatorname{tg} x}{1 + x^2}$
2. а) $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} + 7x,$	7. а) $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{2x}{x^2} - 7 \sin x,$

$\text{б) } y = \frac{2x \cdot \operatorname{tg} x}{1+x^2}$	$\text{б) } y = \frac{6-x}{5+x^2}$
$3. \text{ а) } y = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3} + 7 \cos x,$ $\text{б) } y = \frac{2x}{1+x^2}$	$8. \text{ а) } y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - 3 \log_2 x - 4 \sin x, \quad \text{б)}$ $y = \frac{6-x^2}{5-2x}$
$4. \text{ а) } y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x} + 7, \quad \text{б)}$ $y = \frac{2x\sqrt{x}}{1+x^2}$	$9. \text{ а) } y = \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - 3 \log_3 x - \arcsin x, \quad \text{б)}$ $y = \frac{6-x^2}{2x-3}$
$5. \text{ а) } y = \sqrt[8]{x} - 4 \cos x - \frac{3}{x} + \ln x, \quad \text{б)}$ $y = \frac{2-x^2}{1+x^2}$	$10. \text{ а) } y = \frac{16}{\sqrt[4]{x}} - 5 \log_5 x - 5e^x, \quad \text{б)}$ $y = \frac{3-2x^2}{2x-5}.$

Задание №4. Найдите производную сложной функции:

$1. \text{ а) } y = \sqrt{1+x^4}$ $\text{б) } y = \arcsin x^2$	$6. \text{ а) } y = (7x^3 - 3)^6$ $\text{б) } y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$
$2. \text{ а) } y = \sqrt{x^3 - 5}$ $\text{б) } y = \arcsin 3x^2$	$7. \text{ а) } y = (2 - 3x^4)^8$ $\text{б) } y = \arcsin \frac{x}{2}$
$3. \text{ а) } y = \sqrt{2x^3 - 5}$ $\text{б) } y = \arccos x^2$	$8. \text{ а) } y = \sqrt[4]{(3x^3 + 2)^3}$ $\text{б) } y = \arcsin \sqrt{x}$
$4. \text{ а) } y = \sqrt[4]{5x^3 + 2}$ $\text{б) } y = \arccos 5x^2$	$9. \text{ а) } y = \sqrt[5]{5x^3 + 2}$

	б) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$
5) а) $y = (2x^3 - 3)^8$ б) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$	10. а) $y = (2x - 5x^4)^5$ б) $y = \arcsin 3x$

Задание №5. Исследовать и построить график функции:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 4$	6. $y = \frac{4x^3 - x^4}{5}$
2. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$	7. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$
3. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$	8. $y = \frac{1}{x^2 - 7x + 12}$
4. $y = \frac{1}{1 - x^2}$	9. $y = \frac{(x+1)(x+8)}{x}$
5. $y = 1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5$	10. $y = 4x^2 - x^4 - 3$

Задание №6. Вычислить неопределенный интегралы:

1. а) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$ б) $\int x^3 e^{-x} dx$	6. а) $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$ б) $\int \cos 5x dx$
--	---

<p>2. a) $\int (\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{x^2+3}) dx$ b) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$</p>	<p>7. a) $\int e^x (2 - \frac{e^{-x}}{x^3}) dx$ b) $\int x \arctg x dx$</p>
<p>3. a) $\int (\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{x^2+3}) dx$ b) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$</p>	<p>8. a) $\int (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2 dx$ b) $\int e^{2x} dx$</p>
<p>4. a) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$ b) $\int \frac{x^4}{x^5+7} dx$</p>	<p>9. a) $\int (\frac{2}{x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}) dx$ b) $\int \cos 5x dx$</p>
<p>5. a) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$ b) $\int \frac{e^{4x}}{e^x-1} dx$</p>	<p>10. a) $\int (\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}) dx$ b) $\int x^2 e^{-x} dx$</p>

Задание № 7. Вычислить определенный интеграл:

1. $\int_0^1 (2x^2 - 7x + 5) dx$	6. $\int_0^1 (-x^2 + 9x + 3) dx$
2. $\int_0^1 (-4x^2 + 2x - 10) dx$	7. $\int_0^1 (3x^2 - 8x - 10) dx$
3. $\int_0^1 (-4x^2 - 3x + 5) dx$	8. $\int_0^1 (-3x^2 - 4x - 10) dx$
4. $\int_0^1 (x^2 - 3x + 5) dx$	9. $\int_0^1 (-3x^2 - 2x - 1) dx$
5. $\int_0^1 (x^2 - 7x + 8) dx$	10. $\int_0^1 (-x^2 - 2x + 9) dx$

5. Литература

1. ЭБС «Znanium.com» Дадаян, А.А. Математика.: учебник / А.А. Дадаян. - М.: Форум, 2013. - 544 с. - Режим доступа: <http://znanium.com/>
2. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. - М.: Российский государственный университет правосудия, 2015. - 342 с. - ЭБС «IPRbooks» - Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/49604.html>
3. Башмаков, М.И. Математика: учебник / М.И. Башмаков. – М.: Академия, 2015. – 256 с.
4. Башмаков, М.И. Математика. Задачник: учебное пособие / М.И. Башмаков. – М.: Академия, 2014. – 416 с.