

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«МАЙКОПСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет информационных систем в экономике и юриспруденции
Кафедра информационной безопасности и прикладной информатики

ИНФОРМАТИКА:
математические и статистические задачи
средствами Microsoft Excel

Учебное пособие

Майкоп
2021 г.

УДК [002.6:004.42] (07)

ББК 73

И-74

Печатается по решению бюро Научно-технического совета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Майкопский государственный технологический университет» (протокол № 1 от 16 марта 2021 г.).

Рецензенты:

Дёмина Т.И., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики, физики и системного анализа Майкопского государственного технологического университета.

Коджешау М.А., канд. пед. наук, доцент кафедры прикладной математики, информационных технологий и информационной безопасности Адыгейского государственного университета.

Составители: кандидат экономических наук **Меретукова С.К.**
кандидат технических наук, доцент **Чундышко В.Ю.**
кандидат педагогических наук, доцент **Меретуков Ш.Т.**

И-74 Информатика: математические и статистические задачи средствами Microsoft Excel: учебное пособие / составители Меретукова С. К., Чундышко В. Ю., Меретуков Ш. Т.; М-во науки и высш. образования РФ, ФГБОУ ВО «МГТУ», Фак. информац. систем в экономике и юриспруденции, Каф. информац. безопасности и приклад. информатики. – Майкоп: МГТУ, 2021. – 128 с.

ISBN 978-5-88941-155-0

Учебное пособие содержит теоретическое изложение основных способов решения математических и статистических задач по дисциплине «Информатика» с подробным разбором примеров.

Содержание пособия, его структура и логика изложения соответствуют требованиям, предъявляемым государственным образовательным стандартам высшего образования.

Предназначено для студентов всех форм обучения, изучающих информатику, а также для преподавателей и специалистов любой предметной области для самостоятельного изучения.

ISBN 978-5-88941-155-0



УДК [002.6:004.42] (07)

ББК 73

© Меретукова С.К., Чундышко В.Ю., Меретуков Ш.Т. 2021

Содержание

Введение	5
Глава 1. Решение математических задач средствами	
Microsoft Excel	6
1.1 Задачи общего свойства	6
1.2 Матрицы и операции с матрицами	15
1.2.1. Транспонирование	17
1.2.2 Вычисление определителя матрицы	18
1.2.3 Нахождение обратной матрицы	19
1.2.4 Сложение и вычитание матриц	21
1.2.5 Умножение матрицы на число.....	22
1.2.6 Умножение матриц	23
Упражнения	25
1.3 Решение систем линейных уравнений	29
1.3.1 Решение систем линейных уравнений матричным методом	29
1.3.2 Решение систем линейных уравнений методом Крамера	33
1.3.3 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	36
Упражнения для самостоятельной работы.....	40
1.4 Построение графиков функций.....	46
1.4.1 Построение графика функции с одним условием	48
1.4.2 Построение двух графиков в одной системе координат.....	50
1.4.3 Построение графика функции с двумя условиями.....	53
1.4.5 Построение графика функции с несколькими условиями.....	55
1.4.6 Построении поверхности	58
1.4.7 Построении поверхности второго порядка	60
Упражнения	62
Глава 2. Решение статистических задач средствами	
Microsoft Excel	69
2.1 Методы обработки статистических данных	71
Упражнения	81
2.2 Выборочные характеристики	82
Упражнения	86
2.3 Использование инструментов Пакета анализа	87

Упражнения	90
2.4 Проверка статистических гипотез	91
Упражнения	99
2.5 Анализ двух выборок	99
Упражнения	107
2.6 Использование инструмента Пакета анализа для выявления различий между выборками	108
Упражнения	112
2.7 Дисперсионный анализ	112
Упражнения	115
2.8 Корреляционный анализ	115
Упражнения	120
2.9 Регрессионный анализ	120
Упражнения	125
Список использованной литературы	126

Введение

В настоящее время Microsoft Excel представляет собой достаточно мощное средство, которое включает в себя как электронные таблицы, так и средства визуального программирования. Электронные таблицы позволяют производить обработку чисел и текста, задавать формулы и функции для их автоматического выполнения. Microsoft Excel - это эффективное средство представления, быстрой обработки и анализа данных. Microsoft Excel построен на передовых программных технологиях. Данный пакет дает пользователю возможность получать с минимальными затратами усилий как количественные, так и качественные оценки решаемых задач. Для этого легко представить данные в виде графиков и диаграмм самого различного вида. Удобство и постоянно расширяемый спектр решаемых задач сделало Microsoft Excel одним из самых популярных табличных процессоров.

В предлагаемом учебном пособии на различных примерах продемонстрированы широкие возможности Microsoft Excel при решении математических и статистических задач.

Представленные в учебном пособии примеры и задачи, а также большое количество индивидуальных заданий предназначены для углубленного освоения возможностей этого программного средства.


Материал учебного пособия содержит разбор примеров, наиболее часто встречающихся при решении задач прикладного характера, которые связаны с решением систем линейных уравнений и построением различного рода графиков и поверхностей, статистических задач.

Настоящее учебное пособие представляет собой практическое руководство по освоению способов работы, инструментов и методов решения математических и статистических задач с помощью табличного процессора Microsoft Excel.

ГЛАВА 1. РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СРЕДСТВАМИ MICROSOFT EXCEL

Возможности Microsoft Excel удобно использовать для решения различных математических, физических, экономических и других задач. Достаточно правильно расположить информацию на рабочем листе, т.е. подготовить начальные данные и определиться с местом расположения результата, а также ввести необходимые формулы для расчетов.

1.1 Задачи общего свойства

В Microsoft Excel имеется большой выбор встроенных функций для обработки как числовых значений, так и данных другого типа, содержащейся в ячейках. Просмотреть имеющиеся категории функций и конкретное назначение отдельной функции можно с помощью **Мастера функций** (вызывается с помощью кнопки  в строке формул или с помощью команды **Формулы – Вставить функцию**).

При работе с таблицами часто возникает ситуация, когда необходимо применить одну и ту же операцию или формулу к некоторому диапазону ячеек, которые образуют интервал массива (массив-интервал). Microsoft Excel предоставляет различные средства для решения такого типа задач. В библиотеке функций Excel в категориях **Математические**, **Ссылки и массивы** есть следующие функции, которые обеспечивают работу с массивами ячеек (табл.1.1):

Таблица 1.1

Краткая характеристика функций для решения
задач общего назначения

Функция	Описание
1	2
СТОЛБЕЦ(ссылка)	возвращает номер столбца, на который указывает ссылка
СТРОКА(ссылка)	возвращает номер строки, определяемой ссылкой
СУММКВРАЗН(массив_x; массив_y)	возвращает сумму квадратов разностей соответствующих значений в двух массивах
СУММПРОИЗВ(массив1; массив2; массив3;...)	возвращает сумму произведений диапазонов или массивов
СУММРАЗНКВ(массив_x; массив_y)	возвращает сумму разностей квадратов соответствующих значений в двух массивах
СУММЕСЛИ(диапазон; критерий; диапазон_суммирования)	возвращает сумму ячеек, заданные указанным условием
СУММКВ(число1; число2;...)	возвращает сумму квадратов аргументов
СЧЕТЕСЛИ(диапазон; критерий; диапазон_суммирования)	возвращает количество непустых ячеек в диапазоне, удовлетворяющих заданному условию

Задача 1.1

На плоскости заданы координаты точек. Определить сколько заданных точек принадлежит области, определенной системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 36 \\ x^2 + y^2 \geq 16 \\ y \leq -x - 15 \\ x \geq -15 \\ y \geq -15 \end{cases}$$

Решение

1. В соответствующие ячейки рабочего листа введите необходимые подписи для данных:

- в ячейку **A1** – текст: **Подсчет точек, принадлежащих заданной области;**
- в ячейку **A3** – текст: **Заданный массив точек на плоскости;**
- в ячейки **A4** и **B4** – соответственно **x** и **y**;
- в ячейку **D4** – текст: **Точки, принадлежащие диапазону;**
- в ячейки **A5:B19** (диапазон зависит от количества точек) – координаты заданных точек;
- в ячейку **A21** – текст: **Общее количество точек, принадлежащих диапазону** (в данном случае поступаем аналогично заполнению ячеек **A3** и **B3**).

2. В ячейку **C5** введите следующую формулу, используя встроенные функции Excel:

```
=ЕСЛИ(ИЛИ(И(A5^2+B5^2<=36;A5^2+B5^2>=16);И(B5<=(-A5)-15;A5>=-15;B5>=-15)));1;0)
```

которая далее копируется на диапазон **C6:C19**.

3. Для организации текстовой подписи принадлежности добавьте в ячейку **D5** (и соответственно в диапазон **D5:D19**) формулу:

```
=ЕСЛИ(C5=1;"данная точка принадлежит диапазону";)
```

причем пользовательский формат для отображения чисел в диапазоне **D5:D19** следующий:

```
; ; [Белый]
```


4. В ячейку **C21** введите формулу:

=СУММ(C5:C19)

5. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.1, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Подсчет точек, принадлежащих заданной области							
2								
3	Заданный массив точек на плоскости							
4	x	y		Точки принадлежащие диапазону				
5	8	1	0					
6	-10	-25	0					
7	1	5	1	<i>данная точка принадлежит диапазону</i>				
8	6	-10	0					
9	2	5	1	<i>данная точка принадлежит диапазону</i>				
10	-7	3	0					
11	5	2	1	<i>данная точка принадлежит диапазону</i>				
12	27	35	0					
13	16	-28	0					
14	-3	-15	1	<i>данная точка принадлежит диапазону</i>				
15	7	-8	0					
16	4	4	1	<i>данная точка принадлежит диапазону</i>				
17	3	4	1	<i>данная точка принадлежит диапазону</i>				
18	-5	3	1	<i>данная точка принадлежит диапазону</i>				
19	2	-8	0					
20								
21	Общее количество точек, принадлежащих диапазону		7					

Рисунок 1.1 Принадлежность точек заданной области

Задача 1.2

Для заданных целых чисел определить количество чисел, кратных 7.

Решение

1. В соответствующие ячейки рабочего листа добавьте необходимые подписи для данных и заданный диапазон ячеек:

- в ячейку **A1** – текст: **Количество чисел, кратных 7;**

- в ячейку **A3** – текст: **Заданный диапазон чисел**;
- в ячейку **C3** – текст: **Деление точки на 7**;
- в ячейки **A4:A20** (диапазон зависит от количества чисел) – заданные числа;
- в ячейку **A22** – текст: **Общее количество точек, кратных 7**.

2. В ячейку **B4** введите следующую формулу, используя встроенные функции Excel:

=ЕСЛИ(ОСТАТ(A4;7)=0;1;0)

которая далее копируется на диапазон **B5:B20**.

3. В ячейку **C4** (и соответственно в диапазон **C4:C20**) введите формулу:

=ЕСЛИ(B4=1;"данная точка делится без остатка на 7";)

причем пользовательский формат для отображения чисел в диапазоне **C4:C20** следующий:

; ; [Белый]

4. В ячейку **B22** введите формулу:

=СУММ(B4:B20)

5. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.2, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

Задача 1.3

Удвоить числа, расположенные на четных местах одномерного массива, и определить их сумму.

Решение

1. В соответствующие ячейки рабочего листа добавьте необходимые подписи для данных и заданный диапазон ячеек:

- в ячейку **A1** – текст: **Сумма удвоенных чисел, расположенных на четных местах одномерного массива**;
- в ячейку **A3** – текст: **Заданный диапазон чисел**;
- в ячейку **B3** – текст: **Удвоение чисел**;

	A	B	C	D	E	F	G
1	Количество чисел, кратных 7						
2							
3	Заданный диапазон чисел		Деление точки на 7				
4	-21	1	данная точка делится без остатка на 7				
5	5	0					
6	63	1	данная точка делится без остатка на 7				
7	105	1	данная точка делится без остатка на 7				
8	-83	0					
9	1498	1	данная точка делится без остатка на 7				
10	-258	0					
11	67	0					
12	13658	0					
13	81	0					
14	-546	1	данная точка делится без остатка на 7				
15	100	0					
16	35	1	данная точка делится без остатка на 7				
17	28	1	данная точка делится без остатка на 7				
18	-11	0					
19	63	1	данная точка делится без остатка на 7				
20	112	1	данная точка делится без остатка на 7				
21							
22	Общее количество точек, кратных 7	9					
23							

Рисунок 1.2 Количество точек, кратных 7

– в ячейки **A4:A11** (диапазон зависит от количества чисел)
– заданные числа;

– в ячейку **A14** – текст: **Сумма удвоенных чисел.**

2. В ячейку **B4** введите следующую формулу, используя встроенные функции Excel:

=ЕСЛИ(ОСТАТ(СТРОКА(A4);2)=0;2*A4;0)

которая далее копируется на диапазон **B5:B20**.

3. В ячейку **B15** введите формулу:

=СУММ(B4:B11)

4. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.3, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

	А	В	С
1	Сумма удвоенных чисел, расположенных на четных местах		
2			
3	Заданный диапазон чисел	Удвоение чисел	
4	21	42	
5	5	0	
6	7	14	
7	25	0	
8	121	242	
9	23	0	
10	13	26	
11	10	0	
12			
13	Сумма удвоенных чисел	324	

Рисунок 1.3 Сумма удвоенных чисел, расположенных на четных местах одномерного массива

Задача 1.4

Подсчитать число точек, попадающих в объединение фигуры, образованной двумя пересекающимися прямоугольниками с соответствующими координатами: (3;-2), (3;2), (10;2), (10;-2) и (6;-3), (6;5), (8;5), (8;-3). Координаты точек заданы массивами целых чисел X(30) и Y(30).

Решение

1. В соответствующие ячейки рабочего листа добавьте необходимые подписи для данных и данные:

- в ячейку **A7** – текст: **Произвольное число**;
- в ячейку **A8** – текст: **k=**;
- в ячейку **B8** – число: **9**;
- в ячейку **A9** – текст: **Заданный массив**;
- в ячейку **A10** – текст: **X**;
- в ячейку **B10** – текст: **Y**;

- в ячейку **E8** – текст: **Заданные прямоугольники**;
- в ячейку **E9** – текст: **Первый** (для формирования этой подписи над двумя столбцами объедините с соседней ячейкой);
- в ячейку **E10** – текст: **X**;
- в ячейку **F10** – текст: **Y**;
- в ячейку **G9** – текст: **Второй**;
- в ячейку **G10** – текст: **X**;
- в ячейку **H10** – текст: **Y**;
- в ячейку **L10** – текст: **Принадлежность точек диапазону**;
- в ячейку **D37** – текст: **Число точек**;
- в ячейки **E11:F15** – введите координаты первого прямоугольника;
- в ячейки **G11:H15** – введите координаты второго прямоугольника.

2. В ячейки **A11:B40** введите функцию:

=ОТБР(СЛЧИС()*\$B\$8*2-\$B\$8)

3. В ячейку **L11** (а также в ячейки **L12:L40**) введите формулу:

=ЕСЛИ(И(A11>=6;A11<=8;B11>=-2;B11<=2);ИСТИНА;ЛОЖЬ)

4. Для формирования текстового сообщения сформируйте формулу в ячейке **M11**:

=ЕСЛИ(L11=ИСТИНА;"Точка находится внутри прямоугольника";)

Скопируйте данную формулу на весь диапазон ячеек **M12:M40**. Пользовательский формат представления данных для указанного диапазона(выбираете белый цвет для отображения 0);

; ; [Белый]

5. Для суммирования точек, попадающих в заданный диапазон, в ячейку **E37** введите формулу:

=СЧЁТЕСЛИ(L11:L40;ИСТИНА)

6. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.4, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

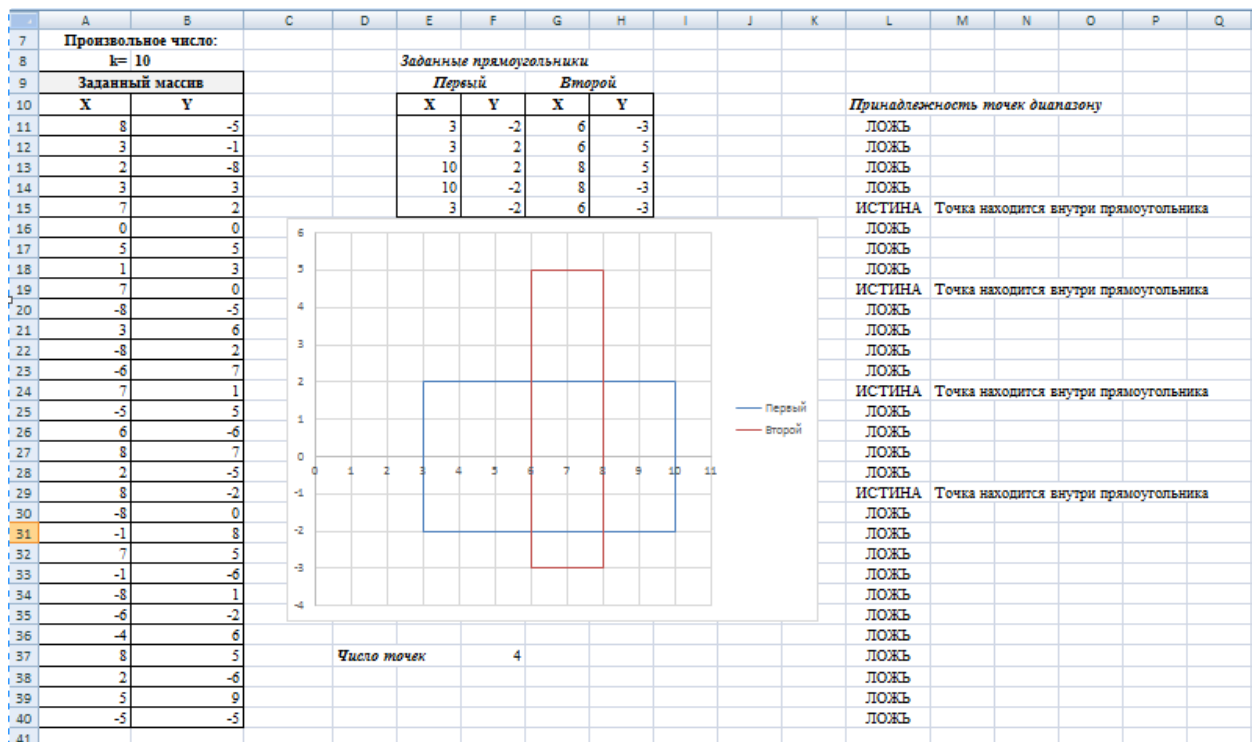


Рисунок 1.4 Количество точек в заданном диапазоне

Задача 1.5

Подсчитать в заданном двумерном массиве количество положительных чисел.

Решение

1. Заполните ячейки **A4:D7** необходимыми значениями:
2. В ячейку **F4** введите формулу:
`=СЧЁТЕСЛИ(A4:D7;">0")`
3. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.5, используя соответствующие кнопки пункта меню Главная.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Подсчет положительных элементов						
2							
3	Заданный массив					Количество положительных элементов	
4	15	-6	-8	-34		9	
5	-10	5	15	-11			
6	11	24	245	0			
7	8	27	165	-78			
8							

Рисунок 1.5 Подсчет положительных элементов массива

1.2 Матрицы и операции с матрицами

Средства Microsoft Excel оказываются весьма полезны в линейной алгебре, прежде всего для операций с матрицами и решения систем линейных уравнений.

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы и обозначаются строчными буквами и двойной индексацией: a_{ij} , где i – номер строки, j – номер столбца. Например, матрица A размера $m \times n$ может быть представлена в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

где $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$.

Две матрицы A и B одного размера называются **равными**, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij}=b_{ij}$ для любых $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$.

Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей (вектором)-строкой:

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}),$$

а из одного столбца – матрицей (вектором) – столбцом.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

Если число строк матрицы равно числу столбцов и равно n , то такую матрицу называют **квадратной n -го порядка**.

Если у элемента матрицы a_{ij} номер столбца равен номеру строки ($i=j$), то такой элемент называется **диагональным**. Диагональные элементы образуют главную диагональ матрицы.

Квадратная матрица с равными нулю всеми недиагональными элементами называется **диагональной**.

Квадратная матрица называется **единичной**, если она диагональная, и все диагональные элементы равны 1. Единичная матрица имеет следующий вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица любого размера называется **нулевой** или **нуль-матрицей**, если все ее элементы равны 0 и имеет следующий вид:

$$0_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Как и над числами, над матрицами можно проводить ряд операций, причем в случае с матрицами некоторые из операций являются специфичными. Функции, которые можно применить к матрицам, отражены в таблице 1.2.

Таблица 1.2

Краткая характеристика функций для работы с массивами

Функция	Описание
ТРАНСП(массив)	вычисление транспонированной матрицы
МОПРЕД(массив)	вычисление определителя матрицы
МОБР(массив)	вычисление обратной матрицы
МУМНОЖ(массив1;массив2)	возвращает матричное произведение двух матриц

1.2.1 Транспонирование

Транспонированной называется матрица (A^T), в которой столбцы исходной матрицы (A) заменяются строками с соответствующими номерами. В сокращенной форме можно записать следующим образом: если $A=(a_{ij})$, то $A^T=(a_{ji})$.

Из определения транспонированной матрицы следует, что если исходная матрица A имеет размер $m \times n$, то транспонированная матрица A^T имеет размер $n \times m$.

Задача 1.6

Дана матрица A размером 2×5 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Необходимо получить транспонированную матрицу A^T .

Решение

1. Значения матрицы A поместите в ячейки **A4:E5**.
2. Выделите блок ячеек **G4:H8** под транспонированную матрицу (5×2).
3. Выполните команду **Вставка – Мастер функций – Ссылки и массивы – ТРАНСП**. В появившемся окне в поле **Массив** введите диапазон исходной матрицы **A4:E5** и нажмите одновременно клавиши **Ctrl+Shift+Enter**.
4. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.6, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Нахождение								
2	транспонированной матрицы								
3	Заданная матрица A						Траспонируванная матрица		
4	1	3	5	7	9		1	2	
5	2	4	6	8	0		3	4	
6							5	6	
7							7	8	
8							9	0	
9									
10									

Рисунок 1.6 Транспонированная матрица

1.2.2 Вычисление определителя матрицы

Важной характеристикой квадратных матриц является их определитель.

Определитель матрицы – это число, вычисляемое на основе значений элементов массива. Определитель матрицы A обозначается как $|A|$ или Δ .

Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$ или определителем первого порядка называется элемент a_{11} .

$$\Delta_1 = |A| = a_{11}$$

Определителем матрицы второго порядка $A=(a_{ij})$ или определителем второго порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются членами определителя второго порядка.

Существуют специальные правила, облегчающие вычисление определителей вручную, учитываются свойства определителей и т.п. При применении программы Excel в использовании этих приемов нет необходимости.

Задача 1.7

Дана матрица A размером 3×3 : $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -9 \\ 7 & 8 & -11 \\ 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$. Необходимо

вычислить определитель матрицы A .

Решение

1. Значения матрицы A поместите в ячейки **A4:C6**.
2. Установите курсор в ячейку **E4** и выполните команду **Вставка – Мастер функций – Математические – МОПРЕД**. В появившемся окне в поле **Массив** введите диапазон исходной матрицы **A4:C6** и нажмите одновременно клавиши **Ctrl+Shift+Enter**.
3. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.7, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

	A	B	C	D	E	F
1	Нахождение определителя матрицы					
2						
3	Заданная матрица A				Определитель матрицы	
4	4	0	-9		491	
5	7	8	-11			
6	6	7	6			
7						
8						

Рисунок 1.7 Определитель матрицы

1.2.3 Нахождение обратной матрицы

Матрица A^{-1} называется **обратной** по отношению к квадратной матрице A , если при умножении этой матрицы на данную как слева, так и справа, получается единичная матрица:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E$$

Необходимым и достаточным условием существования обратной матрицы является невырожденность исходной матрицы. Матрица называется **невырожденной** или **неособенной**, если ее

определитель отличен от 0 ($|A| \neq 0$); в противном случае (при $|A| = 0$) матрица называется **вырожденной** или **особенной**.

Существуют специальные достаточно сложные алгоритмы для ручного вычисления обратных матриц. В Excel для нахождения обратной матрицы в использовании таких алгоритмов нет необходимости.

Задача 1.8

Дана матрица A размером 3×3 : $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -9 \\ 7 & 8 & -11 \\ 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$. Необходимо

получить обратную матрицу.

Решение

1. Значения матрицы A поместите в ячейки **A4:C6**.
2. Выделите блок ячеек **G4:G6** под обратную матрицу (3×3).
3. Выполните команду **Вставка – Мастер функций – Математические – МОБР**. В появившемся окне в поле **Массив** введите диапазон исходной матрицы **A4:C6** и нажмите одновременно клавиши **Ctrl+Shift+Enter**.

4. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.8, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Нахождение обратной матрицы							
2								
3	Заданная матрица A				Обратная матрица			
4	4	0	-9		0,2545825	-0,12831	0,14664	
5	7	8	-11		-0,219959	0,158859	-0,0387	
6	6	7	6		0,0020367	-0,05703	0,065173	
7								

Рисунок 1.8 Обратная матрица

1.2.4 Сложение и вычитание матриц

Складывать (вычитать) можно матрицы одного размера. **Суммой матриц** $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ размера $m \times n$ называется матрица $C=A+B$, элементами которой являются $c_{ij}= a_{ij}+ b_{ij}$ для $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Аналогично определяется разность двух матриц $C=A-B$.

В Excel для выполнения операций суммирования и вычитания матриц могут быть использованы формулы, вводимые в соответствующие ячейки.

Задача 1.9

Даны матрицы A и B размером 3×2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 13 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 19 & -31 & 5 \end{pmatrix}$. Необходимо получить $A+B$ и $A-B$.

Решение

1. Значения матрицы A поместите в ячейки **A4:C5**, значения матрицы B поместите в ячейки **A8:C9**.

2. Установите курсор в ячейку **E4** и в строке формул введите формулу **=A4+A8** (предварительно установив английскую раскладку клавиатуры).

3. Скопируйте введенную формулу в остальные ячейки результирующей матрицы: установите курсор в ячейку **E4**, наведите указатель мыши на точку в правом нижнем углу ячейки так, чтобы указатель принял вид черного крестика, при нажатой левой кнопки мыши протяните указатель до ячейки **G4**, затем также протяните до ячейки **G5**. В результате в ячейках **E4:G5** появится матрица, равная сумме исходных матриц.

4. Аналогичным образом вычислите разность матриц A и B .

5. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.9, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Нахождение матриц $A+B$ и $A-B$							
2								
3	Заданная матрица A				Матрица $A+B$			
4	1	2	-5		5	2	-2	
5	13	-9	1		32	-40	6	
6								
7	Заданная матрица B				Матрица $A-B$			
8	4	0	3		-3	2	-8	
9	19	-31	5		-6	22	-4	
10								

Рисунок 1.9 Сложение и вычитание матриц

1.2.5 Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A на число k называется матрица $B=k*A$, элементы которой $b_{ij}=ka_{ij}$ для $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$, т.е. при умножении матрицы на постоянную каждый элемент этой матрицы умножается на эту постоянную.

В Excel для выполнения операции умножения матрицы на число могут быть использованы формулы, вводимые в соответствующие ячейки.

Задача 1.10

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 13 & -9 & 1 \end{pmatrix}$. Необходимо получить матрицу

$7*A$.

Решение

1. Значения матрицы A поместите в ячейки **A4:C5**.
 2. Установите курсор в ячейку **E4** и в строке формул введите формулу **=7*A4** (предварительно установив английскую раскладку клавиатуры).

3. Скопируйте введенную формулу в остальные ячейки результирующей матрицы: установите курсор в ячейку **E4**, наведите указатель мыши на точку в правом нижнем углу ячейки так, чтобы указатель принял вид черного крестика, при нажатой левой кнопки мыши протяните указатель до ячейки **G4**, затем также протяните до ячейки **G5**. В результате в ячейках **E4:G5** появится матрица, равная исходной матрице, умноженной на постоянную - 7.

4. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.10, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Умножение матрицы на число							
2								
3	Заданная матрица A				Матрица 3*A+B			
4	1	2	-5		7	14	-35	
5	13	-9	1		91	-63	7	
6								

Рисунок 1.10 Умножение матрицы на число

1.2.6 Умножение матриц

Произведение матриц определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Пусть $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$, $B = (b_{ij})$ размера $n \times r$, тогда размерность произведения $A \times B$ равна $m \times r$. При этом матрица C (размера $m \times r$) называется **произведением** матриц A и B , если каждый элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующий элемент j -го столбца матрицы B , т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}, \quad i=1, 2, \dots, m; \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Для матриц верны общие свойства операции умножения:

- $A*(B*C) = (A*B)*C$ – ассоциативность.
- $A*(B+C) = A*B+A*C$ – дистрибутивность.
- $(A+B)*C = A*C+B*C$.
- $(\alpha*A)*B = A*(\alpha*B) = \alpha*(A*B)$, где α - константа.

Однако имеются и специфические свойства операций умножения матриц:

- умножение матриц некоммутативно – $A*B \neq B*A$.
- если E - единичная матрица, то $E*A=A$, $B*E=B$.
- из того, что $A*B=0$, не следует, что $A=0$ или $B=0$.

В алгебре матриц нет действия деления, а также для квадратных матриц возможна операция возведения в степень.

Задача 1.11

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -9 & 5 \\ 7 & 8 & -11 & 3 \\ 6 & 7 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 10 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Необходимо

получить $A*B$.

Решение

1. Значения матрицы A поместите в ячейки **A4:D6**, значения матрицы B поместите в ячейки **A9:D12**.

2. Выделите блок ячеек под результирующую матрицу **F4:G6** и выполните команду **Формулы – Вставить функцию – Математические – МУМНОЖ**.

3. В появившемся окне **Аргументы функции** в поле **Массив1** введите диапазон исходной матрицы A – **A4:D6**, а поле **Массив2** введите диапазон матрицы B – **A9:D12** и нажмите одновременно клавиши **Ctrl+Shift+Enter**.

4. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.11, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Нахождение матрицы $A*B$							
2								
3	Заданная матрица A					Матрица $A*B$		
4	4	0	-9	5		55	4	
5	7	8	-11	3		157	-19	
6	6	7	6	-4		134	-16	
7								
8	Заданная матрица B							
9	12		-1					
10	10		0					
11	2		3					
12	5		7					
13								

Рисунок 1.11 Умножение матриц

Упражнения

Вариант 1

1. Найдите транспонированную матрицу A^T для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определители матриц A и B , а также $AB-BA$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$. $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

1. Найдите транспонированную матрицу A^T для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определители матриц A и B , а также $AB-BA$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

3. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$. $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вариант 3

1. Найдите транспонированную матрицу A^T для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определители матриц A и B , а также $AB-BA$,

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$. $f(x)=2x^2-3x+6$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вариант 4

1. Найдите транспонированную матрицу A^T для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определители матриц A и B , а также $AB-BA$,

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$. $f(x)=2x^2-3x+6$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 14 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 5

1. Найдите транспонированную матрицу A^T для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определители матриц A и B , а также $AB-BA$,

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 2 & -1 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 2 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$. $f(x)=2x^2-3x+6$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 0 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 6

1. Найдите транспонированную матрицу A^T для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определители матриц A и B , а также $AB-BA$,

если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 10 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$

3. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$. $f(x)=2x^2-3x+6$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 7

1. Найдите транспонированную матрицу A^T для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определители матриц A и B , а также $AB-BA$,

если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & 15 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

3. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$. $f(x)=2x^2-3x+6$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 8

1. Найдите транспонированную матрицу A^T для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определители матриц A и B , а также $AB-BA$,

если $A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$

3. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$. $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 9

1. Найдите транспонированную матрицу A^T для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определители матриц A и B , а также $AB-BA$,

если $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

3. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$. $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 10

1. Найдите транспонированную матрицу A^T для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определители матриц A и B, а также AB-BA,

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 17 & 6 \\ 11 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

3. Найдите значение матричного многочлена f(A). $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.3 Решение систем линейных уравнений

Многие прикладные задачи в технике, экономике и других областях сводятся к решению системы линейных уравнений, поэтому важно уметь их решать.

1.3.1 Решение систем линейных уравнений

матричным методом

Пусть дана линейная система n уравнений с n неизвестными, где a_{ij}, b_i ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$) – произвольные числа, называемые соответственно, коэффициентами при переменных и свободными членами уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.1)$$

Такая запись (1.1) называется системой линейных уравнений в нормальной форме. **Решением системы** (1.1) называется такая совокупность n чисел $(x_1=k_1, x_2=k_2, \dots, x_n=k_n)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Систему (1.1) можно записать в виде матричного уравнения

$$A * X = B, \quad (1.2)$$

где A – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

X – матрица-столбец (вектор) неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

B – матрица-столбец (вектор) свободных членов.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

В развернутом виде систему можно представить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Существует ряд методов решения системы (1.1), ориентированных на вычисления вручную: метод Крамера, Гаусса и т.д. Предполагая использование Excel для проведения вычислений, наиболее целесообразно рассмотреть решение системы в общем виде (метод обратной матрицы). Обратная матрица A^{-1} существует, если ее определитель $|A| \neq 0$. Умножая слева обе части матричного равенства (1.2) на обратную матрицу A^{-1} , получим:

$$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B; E \times X = A^{-1} \times B;$$

$$E \times X = X,$$

отсюда решением системы методом обратной матрицы будет матрица – столбец

$$X = A^{-1} \times B.$$

Таким образом, в общем случае решение линейной системы $A \times X = B$ имеет вид $X = A^{-1} \times B$, где A^{-1} – матрица, обратная к матрице A . Это следует из того, что при решении матричных уравнений при X должна остаться единичная матрица E . Умножая слева обе части уравнения $A \times X = B$ на A^{-1} , получаете решение линейной системы уравнений.

Задача 1.12

Решите систему линейных уравнений $A \times X = B$, где значения соответствующих матрицы и вектора столбца имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

1. Значения матрицы A поместите в ячейки **A4:B5**.
2. Значения столбца свободных членов поместите в ячейки **D4:D5**.

3. В ячейку **A8** введите формулу:
`=МУМНОЖ(МОБР(МУМНОЖ(A4:B5;A4:B5));D4:D5)`

При вводе формулы рекомендуется использовать мастер функций.

4. Для получения численных результатов решения системы линейных уравнений следует выделить диапазон **A8:A9**, затем установить указатель мыши в строку формул и нажать одновременно клавиши **Ctrl+Shift+Enter**.

5. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.12, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

	A	B	C	D	E
1	Решение системы линейных уравнений $A^2 X=B$				
2					
3	Матрица A			Столбец свободных членов	
4	7	2		2	
5	1	4		1	
6					
7	Решение X				
8	0,020710059				
9	0,042899408				
10					

Рисунок 1.12 Решение системы линейных уравнений

Задача 1.13

Вычислите значение квадратичной формы $z = Y^T A^T A Y$, где

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

1. Значения матрицы A поместите в ячейки **A4:B5**.
2. Значения столбца свободных членов поместите в ячейки **D4:D5**.
3. Для вычисления квадратичной формы в ячейку **A8** введите формулу:
`=МУМНОЖ(ТРАНСП(D4:D5);МУМНОЖ(ТРАНСП(A4:B5);МУМНОЖ(A4:B5;D4:D5)))`

При вводе формулы рекомендуется использовать мастер функций.

4. Нажмите одновременно клавиши **Ctrl+Shift+Enter**. Если это не сделаете, в ячейке **A8** появится сообщение **#ЗНАЧ!**

5. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.13, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Нахождение значения квадратичной формы $z=Y^T A^T A Y$						
2							
3	Матрица A			Матрица Y			
4	7	2		3			
5	1	4		1			
6							
7	Решение z						
8	578						
9							

Рисунок 1.13 Вычисление квадратичной формы

1.3.2 Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Решение системы линейных уравнений может быть выполнено с помощью метода Крамера. Для этого надо вычислить определители системы и получить ее решение.

Для решения системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.3)$$

необходимо вычислить Δ - главный определитель системы, который составляется из коэффициентов при неизвестных, и Δ_i - вспомогательные определители для каждого неизвестного:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Δ_i получается путем замены i -го столбца на столбец свободных членов b .

Значения неизвестных вычисляется как $x_i = \Delta_i / \Delta$, где $i = 1, 2, \dots, n$.

Возможны три варианта решения:

- если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение;
- если $\Delta = 0$ и все вспомогательные определители $\Delta_i = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений;
- если хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_i \neq 0$, то система несовместна;
- если $\Delta = 0$, то система решения не имеет.

Задача 1.14

Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение

1. Запишите систему линейных уравнений в матричном виде $A * X = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2. Значения матрицы А поместите в ячейки **С3:Е5**.

3. Значения столбца свободных членов поместите в ячейки **Н3:Н6**.

4. В ячейке **С7** введите формулу для нахождения основного определителя:

=МОПРЕД(С3:Е5)

При вводе формулы рекомендуется использовать мастер функций.

5. В случае если определитель системы не равен нулю, то система имеет единственное решение и систему можно решить методом Крамера.

Для поиска решения вычислите три дополнительных определителя матриц - диапазоны ячеек **С9:Е11**, **С13:Е15** и **С17:Е19**, в каждом из которых вместо одного из столбцов подставляется матрица В. Например, вместо первого столбца (коэффициенты при переменной x_1) ставите столбец матрицы В (свободные коэффициенты).

6. В ячейках **G10**, **G14** и **G18** рассчитайте определители матриц. Введите в ячейки **J10**, **J14** и **J18** решение системы по формуле Крамера как отношение определителя дополнительных матриц к определителю матрицы системы (формулы **=G10/C7**, **=G14/C7** и **=G18/C7** соответственно).

7. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.14, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	Решение СЛУ методом Крамера								$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$		
1											
2											
3			3	-2	4				21		
4	A=		3	4	-2		B=		9		
5			2	-1	-1				10		
6											
7	A =		-60								
8											
9			21	-2	4						
10	Δ 1=		9	4	-2	=	-300	x1=		5	
11			10	-1	-1						
12											
13			3	21	4						
14	Δ 2=		3	9	-2	=	60	x2=		-1	
15			2	10	-1						
16											
17			3	-2	21						
18	Δ 3=		3	4	9	=	-60	x3=		1	
19			2	-1	10						

Рисунок 1.14 Решение системы линейных уравнений методом Крамера

1.3.3 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Решение системы линейных алгебраических уравнений может быть выполнено и с помощью метода Гаусса. Идея метода Гаусса состоит в том, что систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.4)$$

приводят последовательным исключением неизвестных к эквивалентной системе с треугольной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \quad \quad \quad x_2 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_n = d_n \end{cases} \quad (1.5)$$

Для решения систему (1.4) можно представить в виде расширенной матрицы, а затем привести ее к ступенчатому виду с помощью элементарных операций над строками матрицы:

- перестановка строк;
- умножение строки на число, отличное от нуля;
- сложение строки матрицы с другой строкой, умноженной на отличное от нуля число.

Задача 1.15

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 6 \\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 3 \\ 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

Решение

1. Коэффициенты запишите в матрицу А, а свободные члены – в матрицу В. Значения матрицы А поместите в ячейки **C3:F6**, значения столбца свободных членов поместите в ячейки **I3:I6**.

2. Для удобства коэффициенты матрицы А и свободные члены матрицы В вместе введите в диапазон ячеек **C8:G11**. Для наглядности свободные члены выделите заливкой. Если в первой ячейке матрицы А оказался 0, нужно поменять местами строки, чтобы здесь оказалось отличное от 0 значение.

3. Приведите все коэффициенты при x_1 к 0, кроме первого уравнения. Для начала сделайте это для второго уравнения. Скопируйте первую строку в ячейки **C13:G13** без изменений, в ячейки **C14:G14** введите формулу: `=C9:G9-C8:G8*(C9/C8)`,

нажмите **F2** и сочетание клавиш **Ctrl + Shift + Enter**. Таким образом, от второй строки отнимаете первую, умноженную на **C9/\$C\$8**, т.е. отношение первых коэффициентов второго и первого уравнения. Для удобства заполнения строк 15 и 16 ссылки на ячейки первой строки необходимо использовать абсолютные (используйте символ \$).

4. Копируете введенную формулу в строки 15 и 16, таким образом избавляетесь от коэффициентов перед x_1 во всех уравнениях кроме первого.

5. Теперь приведите коэффициенты перед x_2 в третьем и четвертом уравнении к 0. Для этого скопируйте полученные 13 и 14 строки (только значения) в строки 18 и 19, а в ячейки **C20:G20** введите формулу: **=C15:G15-\$C\$14:\$G\$14*(D15/\$D\$14)**, нажмите **F2** и сочетание клавиш **Ctrl + Shift + Enter**. Затем скопируйте эту формулу в ячейки **C21:G21**. Таким образом, реализуется разность строк 15 и 14, умноженных на коэффициент **D15/\$D\$14**. Не забывайте проводить перестановку строк, чтобы избавиться от 0 в знаменателе дроби.

6. Остается привести коэффициент при x_3 в четвертом уравнении к 0, для этого вновь проделайте аналогичные действия: скопируйте полученные 18, 19 и 20 строки (только значения) в строки 23, 24 и 25, а в ячейки **C26:G26** введете формулу: **=C21:G21-\$C\$20:\$G\$20*(E21/\$E\$20)**, нажмите **F2** и сочетание клавиш **Ctrl + Shift + Enter**. Таким образом, реализуется разность строк 21 и 20, умноженных на коэффициент **E21/\$E\$20**. Не забывайте проводить перестановку строк, чтоб избавиться от 0 в знаменателе дроби.

7. Прямая прогонка методом Гаусса завершена. Обратную прогонку начните с последней строки полученной матрицы. Необходимо все элементы последней строки разделить на коэффициент при x_4 . Для этого в строку 31 введите формулу: **=C26:G26/F26**, нажмите **F2** и сочетание клавиш **Ctrl + Shift + Enter**.

8. Приведите все строки к подобному виду, для этого заполните строки 30, 29, 28 следующими формулами:

30 строка: $=(C25:G25-C31:G31*F25)/E25$, нажмите **F2** и сочетание клавиш **Ctrl + Shift + Enter** - отнимаете от третьей строки четвертую, умноженную на коэффициент при x_4 третьей строки;

29 строка: $=(C24:G24-C30:G30*E24-C31:G31*F24)/D24$, нажмите **F2** и сочетание клавиш **Ctrl + Shift + Enter** - от второй строки отнимаете третью и четвертую, умноженные на соответствующие коэффициенты;

28 строка: $=(C23:G23-C29:G29*D23-C30:G30*E23-C31:G31*F23)/C23$, нажмите **F2** и сочетание клавиш **Ctrl + Shift + Enter** - от первой строки отнимаете вторую, третью и четвертую, умноженные на соответствующие коэффициенты.

Результат (корни уравнения) вычислены в ячейках **C28:C31**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	<i>Решение СЛУ методом Гаусса</i>								$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 6 \\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 3 \\ 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$				
1													
2													
3			9	5	4	7				0			
4	A=		4	6	8	7		B=		6			
5			5	8	7	6				3			
6			5	6	7	7				7			
7													
8			9	5	4	7				0			
9			4	6	8	7				6			
10			5	8	7	6				3			
11			5	6	7	7				7			
12													
13			9	5	4	7				0			
14			0	3,777778	6,222222	3,888889				6			
15			0	5,222222	4,777778	2,111111				3			
16			0	3,222222	4,777778	3,111111				7			
17													
18			9	5	4	7				0			
19			0	3,777778	6,222222	3,888889				6			
20			0	0	-3,8235	-3,2647				-5,29412			
21			0	0	-0,5294	-0,2059				1,882353			
22													
23			9	5	4	7				0			
24			0	3,777778	6,222222	3,888889				6			
25			0	0	-3,8235	-3,2647				-5,29412			
26			0	0	0	0,24615				2,615385			
27													
28			1	0	0	0				-6,6875			
29			0	1	0	0				3,3125			
30			0	0	1	0				-7,6875			
31			0	0	0	1				10,625			
32													

Рисунок 1.15 Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

9. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.15, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

10. Самостоятельно сделайте проверку.

Упражнения

Вариант 1

1. Решите системы линейных уравнений $A^2X=B$, $A^3A^T A^2X=B$, а также найдите значение квадратичной формы $z=Y^T A^2 A^T A^2 Y$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \\ 8 & 3 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решите систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -3 \\ 5x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 28 \end{cases}$$

3. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решите системы линейных уравнений $A^2X=B$, $A^T A^5 A^T X=B$, а также найдите значение квадратичной формы $z=Y^T A^2 A^T A^4 Y$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решите систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -15 \\ x_1 + 3x_2 - 26x_3 = -22 \\ 3x_1 + 8x_2 - 14x_3 = 29 \end{cases}$$

3. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решите системы линейных уравнений $A^2X=B$, $A^3A^T A^2 A^T X=B$, а также найдите значение квадратичной формы $z=Y^T A^3 A^T A^2 Y$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решите систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases}$$

3. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решите системы линейных уравнений $A^2X=B$, $AA^T A^3 X=B$, а также найдите значение квадратичной формы $z=Y^T A^T A^3 A^T Y$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решите систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 31 \\ 7x_1 + 4x_2 - 8x_3 = -7 \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -12 \end{cases}$$

3. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$$

Вариант 5

1. Решите системы линейных уравнений $A^2X=B$, $A^5A^TAX=B$, а также найдите значение квадратичной формы $z=Y^TA^2A^TA^3Y$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Решите систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -10 \\ 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 33 \end{cases}$$

3. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Вариант 6

1. Решите системы линейных уравнений $A^2X=B$, $AA^T A^2 AA^T X=B$, а также найдите значение квадратичной формы $z=Y^T A^T A^3 AA^T Y$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Решите систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 22 \\ x_1 - 7x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 = 29 \end{cases}$$

3. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Вариант 7

1. Решите системы линейных уравнений $A^2X=B$, $A^4 A^3 A^2 AX=B$, а также найдите значение квадратичной формы $z=Y^T A^2 AA^T AA^2 Y$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решите систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 24 \end{cases}$$

3. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

Вариант 8

1. Решите системы линейных уравнений $A^2X=B$, $A^3A^T A^2X=B$, а также найдите значение квадратичной формы $z=Y^T A^T A^3 A^T Y$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решите систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - 6x_3 = -9 \\ 3x_1 + 8x_2 - 10x_3 = 9 \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 5 \end{cases}$$

3. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 1 \end{cases}$$

Вариант 9

1. Решите системы линейных уравнений $A^2X=B$, $A^3A^T A^2AX=B$, а также найдите значение квадратичной формы $z=Y^T A^5 A^T AY$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Решите систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 16 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

3. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Вариант 10

1. Решите системы линейных уравнений $A^2X=B$, $A^2A^T A^3 A^T X=B$, а также найдите значение квадратичной формы $z=Y^T A^3 A^T A^2 A^T Y$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 8 & 7 \\ 5 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Решите систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -11 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

3. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

1.4 Построение графиков функций

Работа по построению графиков функций предполагает использование следующей методики:

1. Подготовить диапазон области определения функции (или функций) с помощью маркера автозаполнения.

2. Рассчитать значение функции (функций) на данном диапазоне, используя формулы и функции рабочего листа MS Excel и маркер автозаполнения.

3. Выделить диапазон области определений и области значения функции (функций) и воспользоваться методом построения диаграмм. Для построения графиков лучше использовать типы диаграмм **График** и **Точечная**.

Математические функции в Microsoft Excel (табл.1.3) предназначены для вычисления математических величин, необходимых при проведении расчетов.

Таблица 1.3

Краткая характеристика математических функций

Функция	Описание
1	2
ABS(число)	возвращает модуль (абсолютную величину) числа
ACOS(число)	возвращает арккосинус числа
ACOSH(число)	возвращает гиперболический арккосинус числа
ASIN(число)	возвращает арксинус числа
ASINH(число)	возвращает гиперболический арксинус числа
ATAN(число)	возвращает арктангенс числа
ATAN2(x;y)	возвращает арктангенс для заданных координат x и y
ATANH(число)	возвращает гиперболический арктангенс числа
COS(число)	возвращает косинус числа
COSH(число)	возвращает гиперболический косинус числа
EXP(число)	возвращает число e, возведенное в указанную степень
LN(число)	возвращает натуральный логарифм числа
LOG(число;основание)	возвращает логарифм числа по заданному основанию
LOG10(число)	возвращает десятичный логарифм числа
SIN(число)	возвращает синус заданного угла
SINH(число)	возвращает гиперболический синус числа
TAN(число)	возвращает тангенс числа
TANH(число)	возвращает гиперболический тангенс числа
ГРАДУСЫ(угол)	преобразует радианы в градусы
КОРЕНЬ(число)	возвращает положительное значение квадратного корня
ОСТАТ(число;делитель)	возвращает остаток от деления
ПИ()	возвращает число пи
РАДИАНЫ(угол)	преобразует градусы в радианы
СТЕПЕНЬ(число;степень)	возвращает результат возведения числа в степень
СУММ(число1;число2;...)	суммирует аргументы

1.4.1 Построение графика функции с одним условием

Задача 1.16

Постройте график функции $y = \cos^2(3\pi x)$ на отрезке $[-1;1]$ с шагом 0,2.

Решение

1. Для построения графика функции сначала постройте таблицу ее значений при различных значениях аргумента. Для этого в соответствующие ячейки рабочего листа введите необходимые подписи для данных:

- в ячейку **B1** – текст: **График функции**;
- в ячейку **B3** – текст: **Основная таблица**;
- в ячейку **E3** – текст: **Вспомогательная таблица**;
- в ячейки **B4** и **C4** – соответственно **x** и **y**;
- в ячейки **E4** и **F4** – соответственно **x0** и **шаг**;
- в ячейки **E5** и **F5** – соответственно начальное значение отрезка - **-1** и значение **шага** – **0,2**.

2. В ячейку **B5** введите формулу $=E5$, а в ячейку **E6** введите следующую формулу, используя для ввода абсолютной ссылки функциональную клавишу F4:

$=B5+\$F\5 ,

которая далее копируется на диапазон **B7:B15**.

3. В ячейку **C5** введите формулу, используя **Мастер функций**: $=\text{COS}(3*\text{ПИ}()*B5)^2$

которая далее копируется на диапазон **C6:C15**.

4. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.16, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

	A	B	C	D	E	F	G
1		График функции		$y = \cos^2(3\pi x)$			
2							
3		Основная таблица			Вспомогательная таблица		
4		x	y		x0	шаг	
5		-1	1		-1	0,2	
6		-0,8	0,0954915				
7		-0,6	0,6545085				
8		-0,4	0,6545085				
9		-0,2	0,0954915				
10		0	1				
11		0,2	0,0954915				
12		0,4	0,6545085				
13		0,6	0,6545085				
14		0,8	0,0954915				
15		1	1				
16							

Рисунок 1.16 Результат табуляции функции

5. Выделите диапазон ячеек **C5:C15**, по которым будете строить график функции, затем выполните команду **Вставка – Диаграммы – График** и выберите первый тип графика:

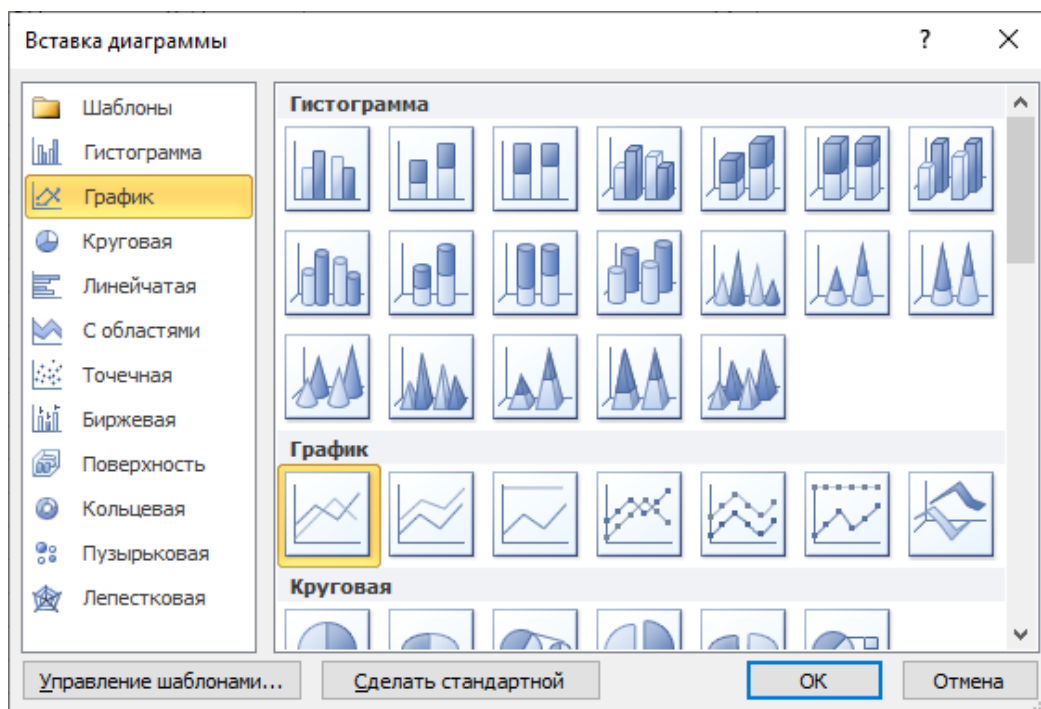


Рисунок 1.17 Диалоговое окно Вставка диаграммы

6. Приведите график заданной функции как показано на рисунке 1.18, используя соответствующие кнопки пункта меню **Конструктор, Макет, Формат**.

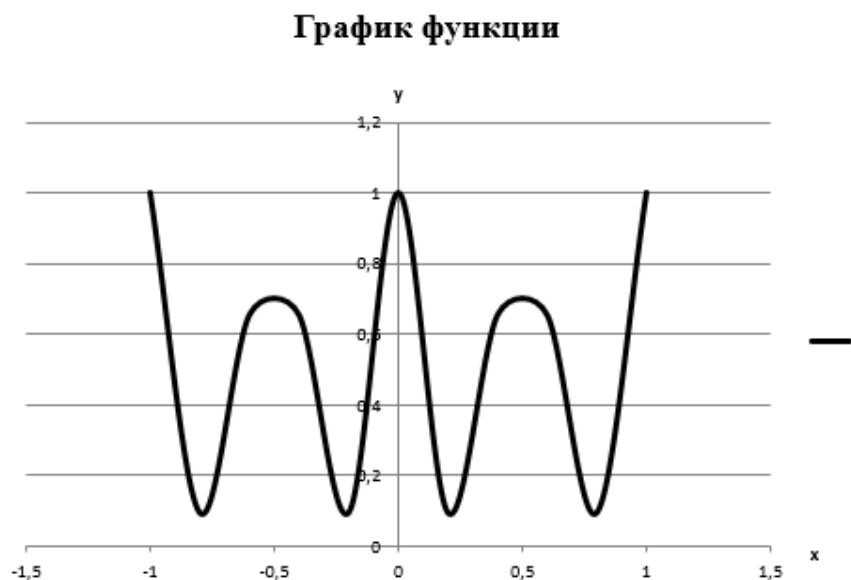


Рисунок 1.18 Результат построения графика функции

1.4.2 Построение двух графиков в одной системе координат

Задача 1.17

Постройте в одной системе координат графики функций $y = 2\sin^2(3\pi x)\cos^3(\pi x)$ и $z = 3\cos^2(2\pi x)\sin(\pi x)$ на отрезке $[-2;2]$ с шагом 0,2.

Решение

1. Для построения графиков функций сначала постройте таблицу значений при различных значениях аргумента. Для этого в соответствующие ячейки рабочего листа введите необходимые подписи для данных:

- в ячейку **В1** – текст: **Графики функций**;
- в ячейку **В3** – текст: **Основная таблица**;
- в ячейку **Г3** – текст: **Вспомогательная таблица**;
- в ячейки **В4, С4** и **Д4** – соответственно **x, y** и **z**;
- в ячейки **Г4** и **Г4** – соответственно **x0** и **шаг**;

– в ячейки **E5** и **F5** – соответственно начальное значение отрезка - **-2** и значение шага – **0,2**.

2. В ячейку **B5** введите формулу =E5, а в ячейку **E6** введите следующую формулу, используя для ввода абсолютной ссылки функциональную клавишу F4:

=B5+\$F\$5,

которая далее копируется на диапазон **B7:B25**.

3. В ячейку **C5** введите формулу, используя **Мастер функций**:
 =2*SIN(3*ПИ()*B5)^2*COS(ПИ()*B5)^3

которая далее копируется на диапазон **C6:C25**.

4. В ячейку **D5** введите формулу, используя **Мастер функций**:
 =3*COS(2*ПИ()*B5)^2*SIN(ПИ()*B5)

которая далее копируется на диапазон **D6:D25**.

	A	B	C	D	E	F	G	H
		Графики функций		$y = 2 \sin^2(3\pi x) \cos^3(\pi x)$		н		$z = 3 \cos^2(2\pi x) \sin(\pi x)$
1								
2								
3		Основная таблица				Вспомогательная таблица		
4		x	y	z		x0	шаг	
5		-2	1,0807E-30	7,3509E-16		-2	0,2	
6		-1,8	0,95788987	0,16838549				
7		-1,6	0,02038987	1,86742371				
8		-1,4	-0,0203899	1,86742371				
9		-1,2	-0,9578899	0,16838549				
10		-1	-3,97E-30	2,297E-15				
11		-0,8	-0,9578899	-0,1683855				
12		-0,6	-0,0203899	-1,8674237				
13		-0,4	0,02038987	-1,8674237				
14		-0,2	0,95788987	-0,1683855				
15		0	1,3686E-29	-2,616E-15				
16		0,2	0,95788987	0,16838549				
17		0,4	0,02038987	1,86742371				
18		0,6	-0,0203899	1,86742371				
19		0,8	-0,9578899	0,16838549				
20		1	-9,193E-30	3,0321E-15				
21		1,2	-0,9578899	-0,1683855				
22		1,4	-0,0203899	-1,8674237				
23		1,6	0,02038987	-1,8674237				
24		1,8	0,95788987	-0,1683855				
25		2	3,6771E-29	-6,064E-15				
26								

Рисунок 1.19 Результат табуляции функции

5. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.17, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

6. Выделите диапазон ячеек **C5:D15**, по которым будете строить графики функций, затем выполните команду **Вставка – Диаграммы – График** и выберите первый тип графика:

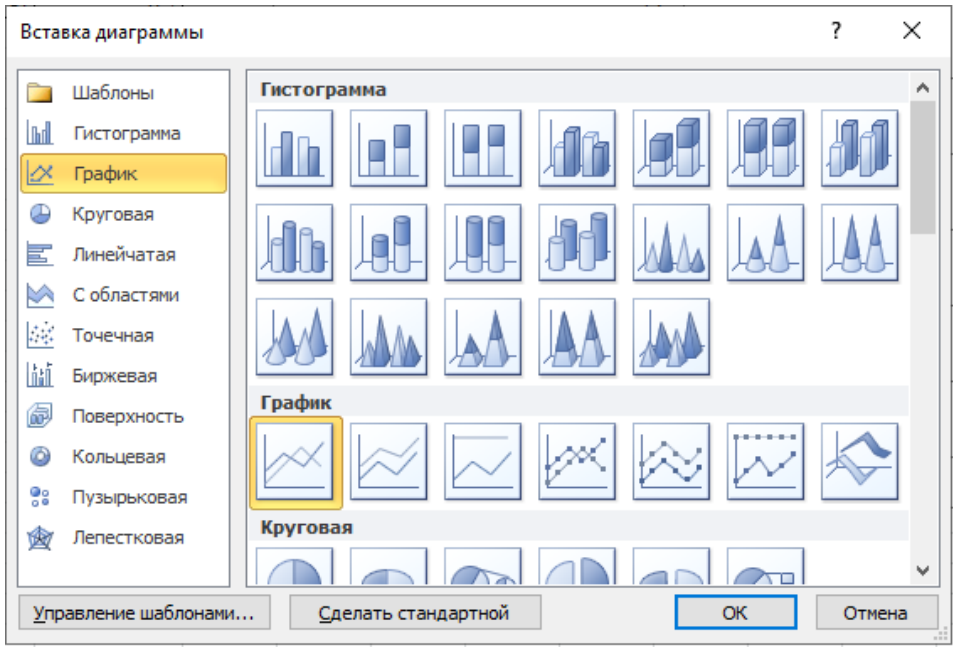


Рисунок 1.20 Диалоговое окно Вставка диаграммы

7. Приведите график заданной функции как показано на рисунке 1.21, используя соответствующие кнопки пунктов меню **Конструктор, Макет, Формат**.



Рисунок 1.21 Результат построения графиков функций

1.4.3 Построение графика функции с двумя условиями

Задача 1.18

Постройте график функции $y = \begin{cases} \cos 3x, x \geq 0 \\ x^2 - 5|x|, x < 0 \end{cases}$ на отрезке $[-1;1]$ с шагом 0,1.

Решение

1. Для построения графика функции сначала постройте таблицу ее значений при различных значениях аргумента. Для этого в соответствующие ячейки рабочего листа введите необходимые подписи для данных:

- в ячейку **В1** – текст: **График функции**;
- в ячейку **В3** – текст: **Основная таблица**;
- в ячейку **Е3** – текст: **Вспомогательная таблица**;
- в ячейки **В4** и **С4** – соответственно **x** и **y**;
- в ячейки **Е4** и **Ф4** – соответственно **x0** и **шаг**;
- в ячейки **Е5** и **Ф5** – соответственно начальное значение отрезка - **-1** и значение **шага** – **0,1**.

2. В ячейку **В5** введите формулу `=E5`, а в ячейку **Е6** введите следующую формулу, используя для ввода абсолютной ссылки функциональную клавишу **F4**:

`=B5+F5`,

которая далее копируется на диапазон **В7:В25**.

3. В ячейку **С5** введите формулу, используя **Мастер функций**: `=ЕСЛИ(B5>=0;COS(3*B5);ABS(B5^2-5*ABS(B5)))`

которая далее копируется на диапазон **С6:С25**.

4. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.22, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

	A	B	C	D	E	F	G
1		График функции		$y = \begin{cases} \cos 3x, & x \geq 0 \\ x^2 - 5 x , & x < 0 \end{cases}$			
2							
3		Основная таблица			Вспомогательная таблица		
4		x	y		x0	шаг	
5		-1	4		-1	0,1	
6		-0,9	3,69				
7		-0,8	3,36				
8		-0,7	3,01				
9		-0,6	2,64				
10		-0,5	2,25				
11		-0,4	1,84				
12		-0,3	1,41				
13		-0,2	0,96				
14		-0,1	0,49				
15		0	6,9389E-16				
16		0,1	0,95533649				
17		0,2	0,82533561				
18		0,3	0,62160997				
19		0,4	0,36235775				
20		0,5	0,0707372				
21		0,6	-0,2272021				
22		0,7	-0,5048461				
23		0,8	-0,7373937				
24		0,9	-0,9040721				
25		1	-0,9899925				
26							

Рисунок 1.22 Результат табуляции функции

5. Выделите диапазон ячеек **C5:C25**, по которым будете строить график функции, затем выполните команду **Вставка – Диаграммы – График** и выберите первый тип графика (рис.1.23).

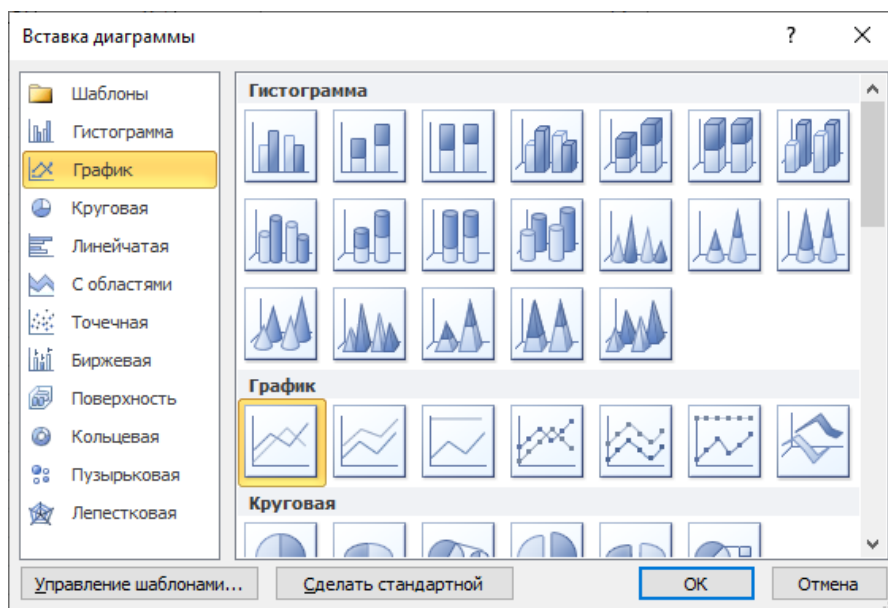


Рисунок 1.23 Диалоговое окно Вставка диаграммы

6. Приведите график заданной функции как показано на рисунке 1.24, используя соответствующие кнопки пунктов меню **Конструктор, Макет, Формат**.

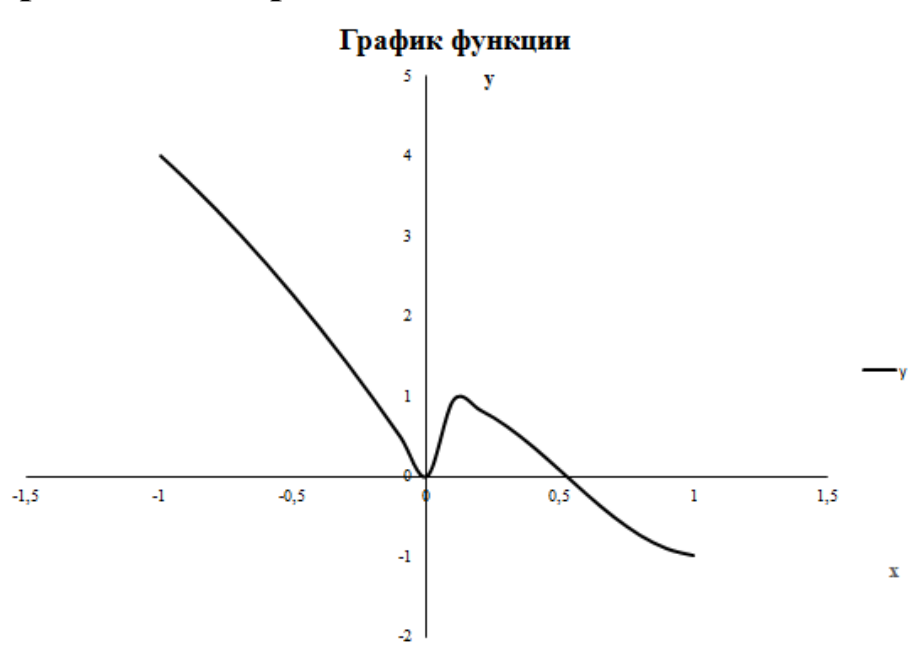


Рисунок 1.24 Результат построения графика функции

1.4.5 Построение графика функции с несколькими условиями

Задача 1.19

$$y = \begin{cases} \frac{1+|x|}{\sqrt[3]{1+x+x^2}}, & x \leq -1 \\ 2\ln(1+x^2) + \frac{1+\cos^4(x)}{2+x}, & x \in (-1,0) \\ (1+x)^{3/5}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Постройте график функции на отрезке $[-2;2]$ с шагом $0,2$.

Решение

1. Для построения графика функции сначала постройте таблицу ее значений при различных значениях аргумента. Для этого в

соответствующие ячейки рабочего листа введите необходимые подписи для данных:

- в ячейку **B1** – текст: **График функции**;
- в ячейку **B3** – текст: **Основная таблица**;
- в ячейку **E3** – текст: **Вспомогательная таблица**;
- в ячейки **B4** и **C4** – соответственно **x** и **y**;
- в ячейки **E4** и **F4** – соответственно **x0** и **шаг**;
- в ячейки **E5** и **F5** – соответственно начальное значение отрезка - **-2** и значение **шага** – **0,2**.

2. В ячейку **B5** введите формулу $=E5$, а в ячейку **E6** введите следующую формулу, используя для ввода абсолютной ссылки функциональную клавишу **F4**:

$=B5+\$F\5 ,

которая далее копируется на диапазон **B7:B25**.

3. В ячейку **C5** введите формулу, используя **Мастер функций**:

$=ЕСЛИ(B5<=-$

$1;(1+B5+B5^2)^{1/3};ЕСЛИ(B5>=0;(1+B5)^{(3/5)};2*LN(1+B5^2)+$
 $(1+COS(B5^4))/(2+B5)))$

которая далее копируется на диапазон **C6:C25**.

4. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.25, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

5. Выделите диапазон ячеек **C5:C25**, по которым будете строить график функции, затем выполните команду **Вставка – Диаграммы – График** и выберите первый тип графика:

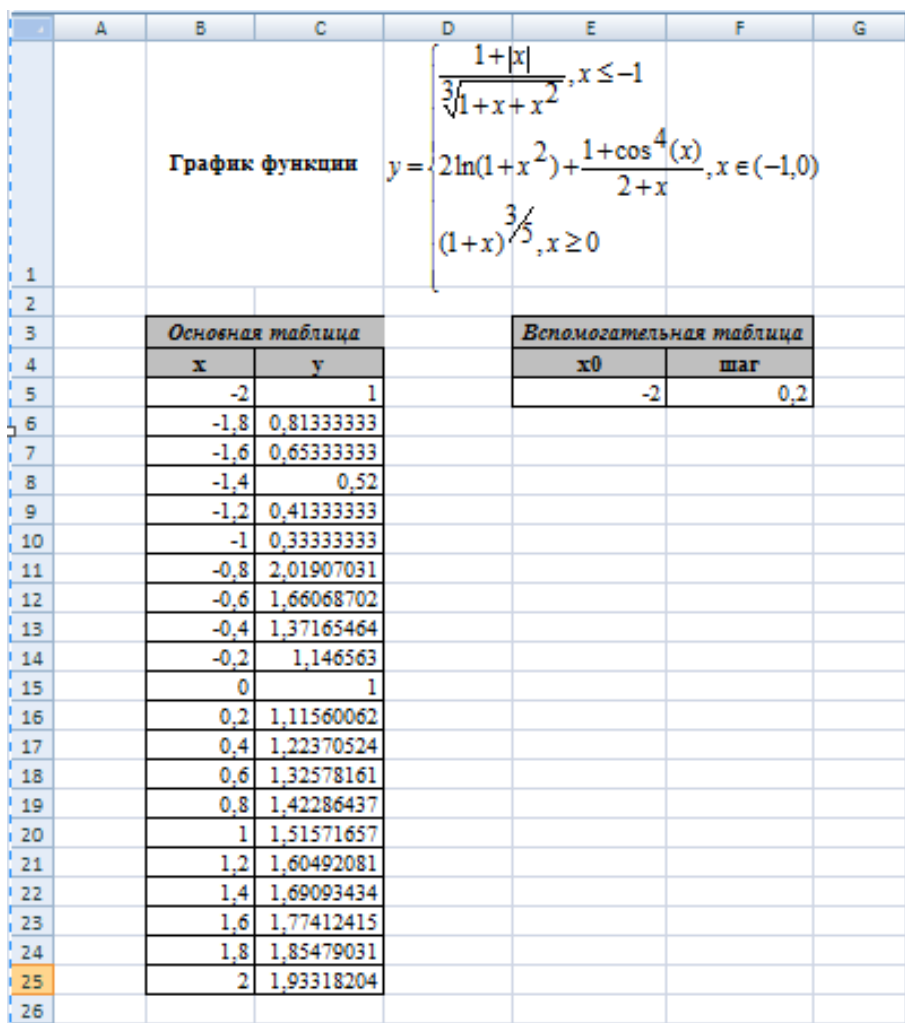


Рисунок 1.25 Результат табуляции функции

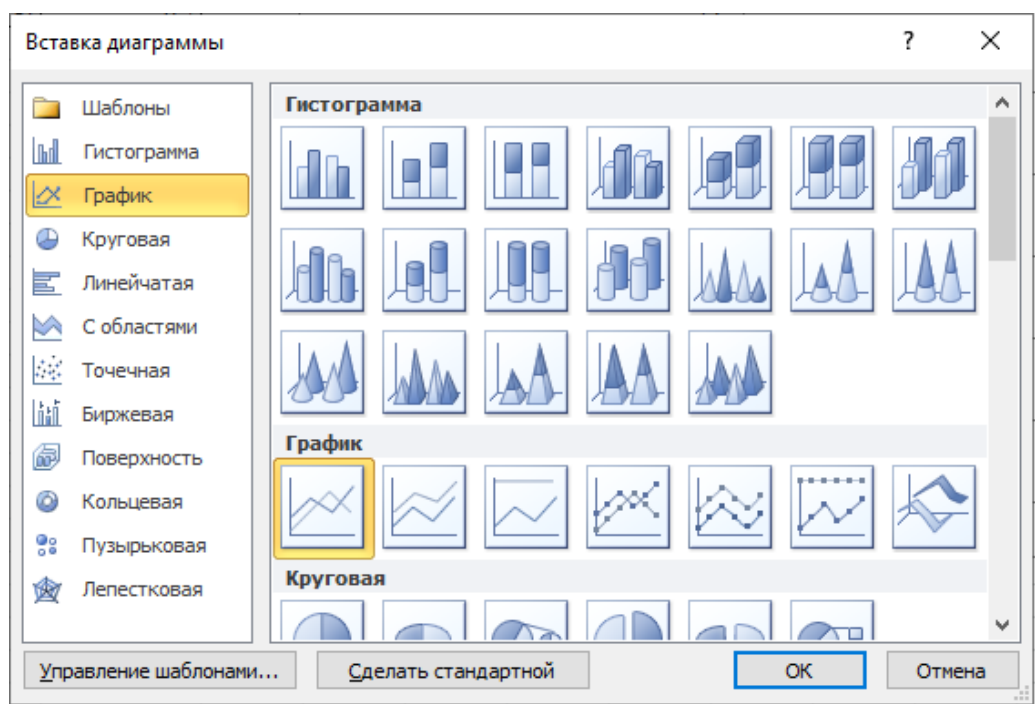


Рисунок 1.26 Диалоговое окно Вставка диаграммы

6. Приведите график заданной функции как показано на рисунке 1.27, используя соответствующие кнопки пунктов меню **Конструктор, Макет, Формат**.

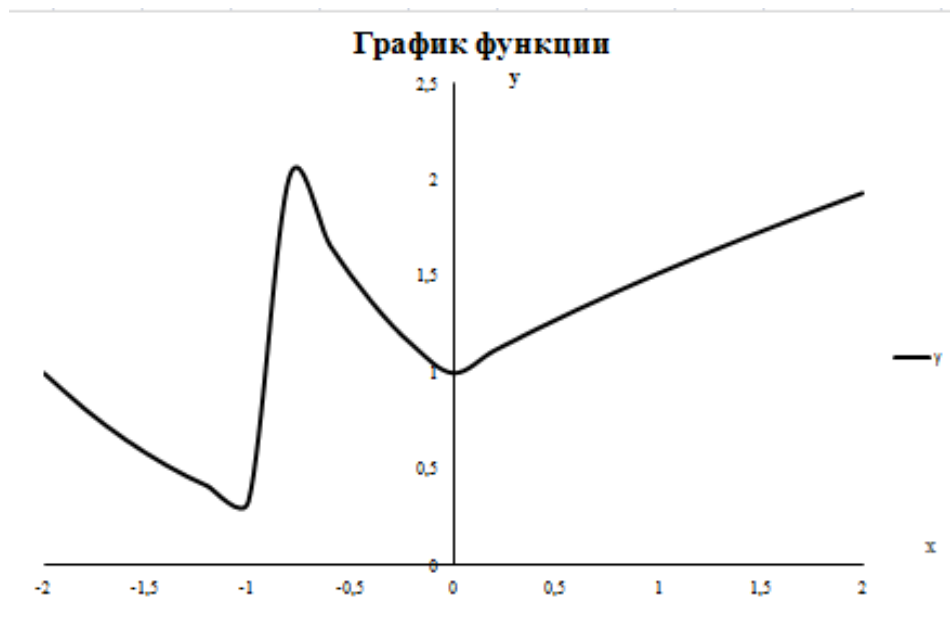


Рисунок 1.27 Результат построения графика функции

1.4.6 Построение поверхности

Общее уравнение поверхностей второго порядка имеет вид уравнения второй степени:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz + 2Gx + 2Yu + 2Kz + L = 0,$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов A, B, C, D, E, F не могут быть равны 0 одновременно. Существует пять основных типов поверхностей: эллипсоиды; гиперболоиды; параболоиды; конусы второго порядка; цилиндры второго порядка.

Для решения задачи необходимо:

1. Записать условие задачи на рабочем листе Excel с помощью редактора формул.
2. Построить таблицу значений аргументов x, y и функции z(x, y).
3. Построить график функции (поверхность) с помощью мастера диаграмм.

Задача 1.20

Постройте поверхность $z = x^2 - y^2$ при $x, y \in [-1; 1]$.

Решение

1. В соответствующие ячейки рабочего листа введите необходимые подписи для данных и их значения:

- в ячейку **B1** – текст: **Построение поверхности**;
- в ячейку **B3** – текст: **x/y**;
- в диапазон ячеек **B4:B14** – последовательность значений: **-1; -0,8;... 1,0** переменной x ;
- в диапазон ячеек **C3:M3** – последовательность значений: **-1; -0,8;... 1,0** переменной y ;

2. В ячейку **C4** введите формулу:

$$=B4^2-C3^2$$

используя для ввода абсолютной ссылки функциональную клавишу F4. Выделите ячейку **C4** и с помощью маркера автозаполнения протащите его так, чтобы заполнить диапазон **C4:M14**.

3. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.28, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		Построение поверхности			$z = x^2 - y^2$									
2														
3		x/y	-1,0	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	
4		-1,0	0,0	0,4	0,6	0,8	1,0	1,0	0,8	0,6	0,4	0,0		
5		-0,8	-0,4	0,0	0,3	0,5	0,6	0,6	0,6	0,5	0,3	0,0	-0,4	
6		-0,6	-0,6	-0,3	0,0	0,2	0,3	0,4	0,3	0,2	0,0	-0,3	-0,6	
7		-0,4	-0,8	-0,5	-0,2	0,0	0,1	0,2	0,1	0,0	-0,2	-0,5	-0,8	
8		-0,2	-1,0	-0,6	-0,3	-0,1	0,0	0,0	0,0	-0,1	-0,3	-0,6	-1,0	
9		0,0	-1,0	-0,6	-0,4	-0,2	0,0	0,0	0,0	-0,2	-0,4	-0,6	-1,0	
10		0,2	-1,0	-0,6	-0,3	-0,1	0,0	0,0	0,0	-0,1	-0,3	-0,6	-1,0	
11		0,4	-0,8	-0,5	-0,2	0,0	0,1	0,2	0,1	0,0	-0,2	-0,5	-0,8	
12		0,6	-0,6	-0,3	0,0	0,2	0,3	0,4	0,3	0,2	0,0	-0,3	-0,6	
13		0,8	-0,4	0,0	0,3	0,5	0,6	0,6	0,6	0,5	0,3	0,0	-0,4	
14		1,0	0,0	0,4	0,6	0,8	1,0	1,0	1,0	0,8	0,6	0,4	0,0	
15														

Рисунок 1.28 Результат табуляции функции двух переменных

4. Выделите диапазон ячеек **C4:M14**, по значениям которого будете строить поверхность, затем выполните команду **Вставка – Диаграммы – Поверхность** и выберите первый тип поверхности:

5. Приведите график заданной функции как показано на рисунке 1.29, используя соответствующие кнопки пунктов меню **Конструктор, Макет, Формат**.

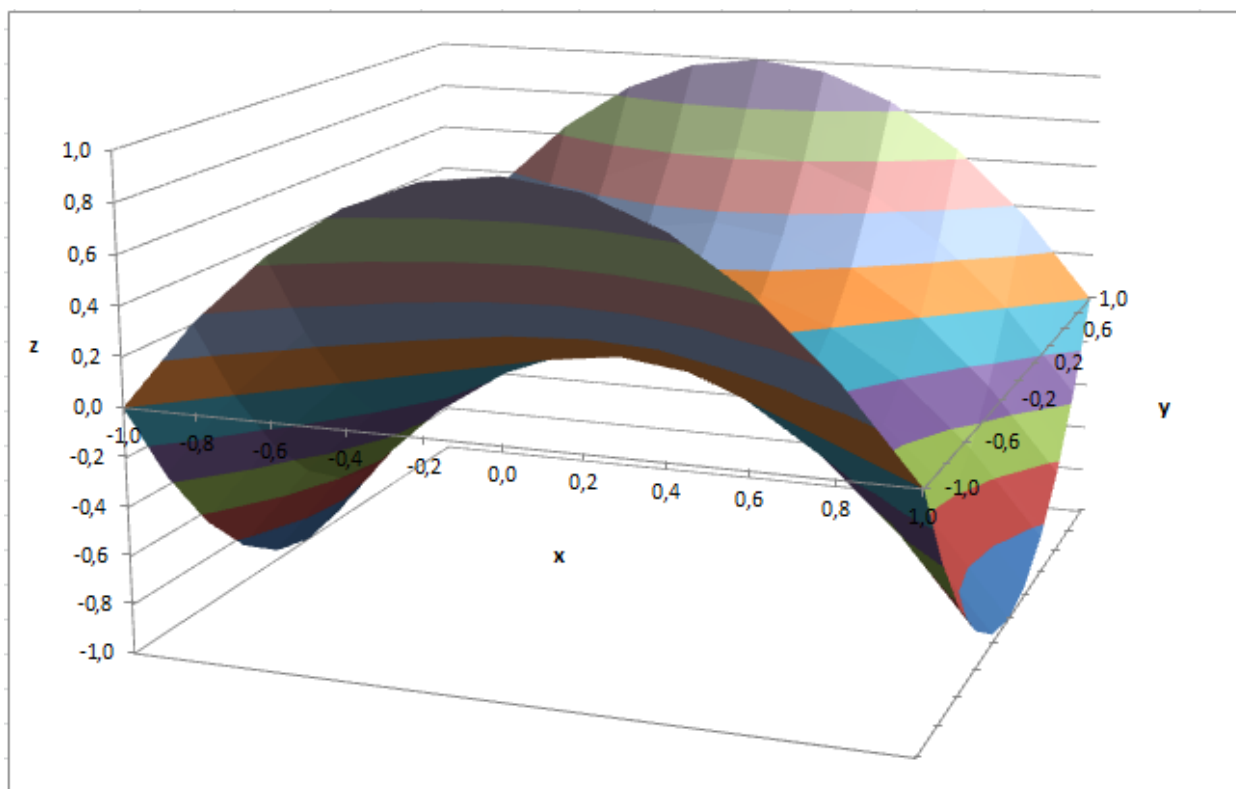


Рисунок 1.29 Результат построения поверхности

1.4.7 Построение поверхности второго порядка

Задача 1.21

Постройте поверхность второго порядка $z^2 + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ при $x, y \in [-5; 5]$.

Решение

1. В соответствующие ячейки рабочего листа введите необходимые подписи для данных и их значения:

– в ячейку **B2** – текст: **Построение поверхности**

$$z^2 + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

– в ячейку **B5** – текст: **x/y;**

– в диапазон ячеек **B6:B27** – последовательность значений от **-5 до 5** с шагом 1, причем каждое значение дублируется дважды;

– в диапазон ячеек **C5:M5** – последовательность значений от **-5 до 5** с шагом 0,1, причем каждое значение дублируется дважды.

2. В ячейку **B5** введите текст **Вспомогательные числа**, в диапазон **A7:A27** введите повторяющиеся числа 2 и 3 (для использования в формуле).

3. В ячейку **C6** введите формулу: **=КОРЕНЬ(1-\$B6^2/9-C\$5^2/4)*ЕСЛИ(ОСТАТ(\$A7;2)=0;1;-1)** используя для ввода абсолютной ссылки функциональную клавишу **F4**. Выделите ячейку **C6** и с помощью маркера автозаполнения протащите его так, чтобы заполнить диапазон **C6:X27**.

4. Отформатируйте ячейки с данными и текстом как показано на рисунке 1.30, используя соответствующие кнопки пункта меню **Главная**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	
1																										
2		Построение поверхности				$z^2 + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$																				
3																										
4																										
5	Вспомогательные числа	x/y	-5	-5	-4	-4	-3	-3	-2	-2	-1	-1	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5		
6			число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
7		2	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
8		3	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
9		2	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
10		3	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
11		2	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
12		3	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
13		2	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
14		3	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
15		2	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
16		3	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
17		2	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
18		3	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
19		2	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
20		3	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
21		2	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
22		3	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
23		2	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
24		3	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
25		2	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
26		3	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
27		2	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	
28		3	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	число	

Рисунок 1.30 Результат табуляции функции двух переменных

5. Выделите диапазон ячеек **C6:X27**, по значениям которого будете строить поверхность, затем выполните команду **Вставка – Диаграммы – Поверхность** и выберите первый тип поверхности:

6. Приведите график заданной функции как показано на рисунке 1.31, используя соответствующие кнопки пунктов меню **Конструктор, Макет, Формат**.

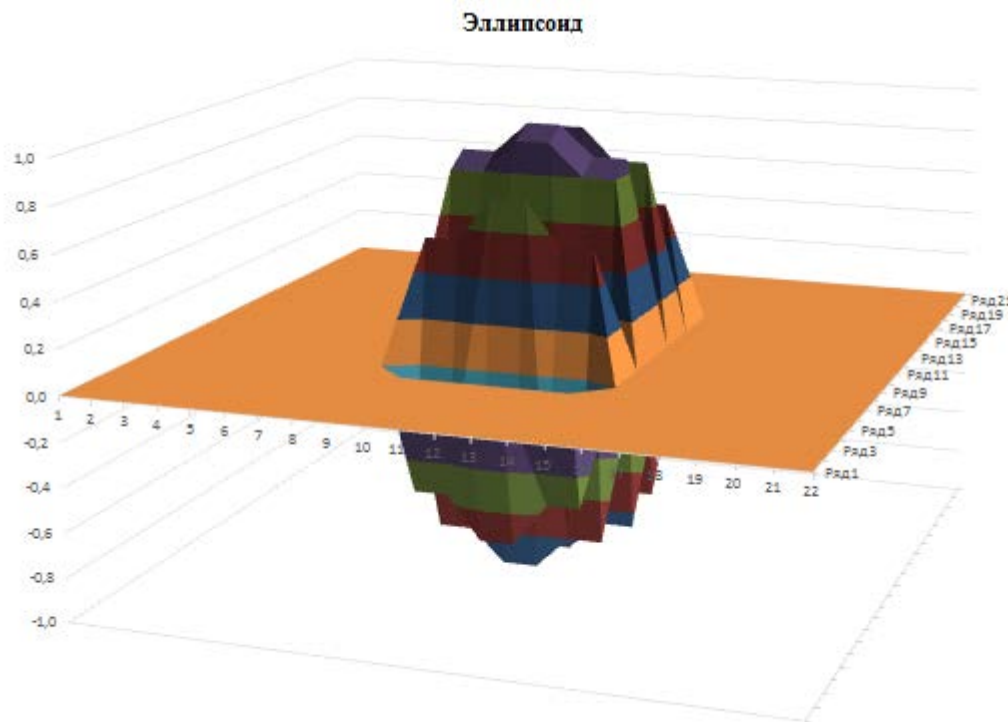


Рисунок 1.31 Результат построения поверхности

Упражнения

Примечание: отрезок и шаг задайте самостоятельно.

Вариант 1

1. Постройте график функции $y = \cos(x-1)e^{6x}$.
2. Постройте в одной системе координат графики функций $y = 5\sin(3x)\cos(x)$ и $z = \cos^2(2x)\sin(\pi x)$.

$$y = \begin{cases} \frac{3 + \sin^2(2x)}{1 + \cos^2(x)}, & x \leq 0 \\ 2\sqrt{1+2x}, & x > 0 \end{cases}.$$

3. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} \frac{1+5x}{3+x^2}, x < 0 \\ \sin^2(x)\sqrt{5+x}, x \in [0,1) \\ \sin^3(x+1)e^{0,6x}, x \geq 1 \end{cases} .$$

4. Постройте график функции

5. Постройте поверхность $z = x^2 \sin(x) - 2y^3$.

6. Постройте поверхность второго порядка $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = -1$.

Вариант 2

1. Постройте график функции $y = 5 \sin(x) \cos(3x+1)$.

2. Постройте в одной системе координат графики функций

$$y = 3 \sin(2\pi x) \cos^2(3\pi x) \text{ и } z = 2 \cos^2(2\pi x) - 3 \sin(3\pi x).$$

$$y = \begin{cases} \frac{1+x^2}{\sqrt{11+x^4}}, x \leq 0 \\ 2x + \frac{\sin^2(x)}{2+x}, x > 0 \end{cases} .$$

3. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} \frac{1+x+x^2}{1+x^2}, x < 0 \\ \sqrt{1 + \frac{5x}{1+x^3}}, x \in [0,1) \\ 5|0,7 \cos(x) + \sin(x)|, x \geq 1 \end{cases} .$$

4. Постройте график функции

5. Постройте поверхность $z = (3x-1)\sqrt{x} + 2 \sin^2(y)$.

6. Постройте поверхность второго порядка $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 0$.

Вариант 3

$$y = \frac{2 + \sin^3(x)}{1 + x^2} .$$

1. Постройте график функции

2. Постройте в одной системе координат графики функций

$$y = 2\sin(\pi x) - 3\cos(\pi x) \quad \text{и} \quad z = \cos^2(2\pi x) - 2\sin(3\pi x).$$

3. Постройте график функции $y = \begin{cases} 3\sin(x) - \cos^2(x), x \leq 0 \\ 3\sqrt{1+x^2}, x > 0 \end{cases}$.

4. Постройте график функции $y = \begin{cases} 3x + \sqrt{1+x^2}, x < 0 \\ 2\cos(x)e^{-2x}, x \in [0,1) \\ 2\sin(3x), x \geq 1 \end{cases}$.

5. Постройте поверхность $z = 10x^3 \sin^2(y) - 2x^2 y^3$.

6. Постройте поверхность второго порядка $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = -1$.

Вариант 4

1. Постройте график функции $y = 7\sin(\pi x) - \cos(3\pi x)\sin(\pi x)$.

2. Постройте в одной системе координат графики функций $y = 5\sin(\pi x) - \cos(3\pi x)\sin(\pi x)$ и $z = \cos(2\pi x) - 2\sin^2(\pi x)$.

3. Постройте график функции $y = \begin{cases} \frac{3x^2}{1+x^2}, x \leq 0 \\ \sqrt{1 + \frac{2x}{1+x^2}}, x > 0 \end{cases}$.

4. Постройте график функции $y = \begin{cases} \frac{|x|}{1+x^2} e^{-5x}, x < 0 \\ \sqrt{1+x^4}, x \in [0,1) \\ \frac{1+\cos(\pi x)}{6+x}, x \geq 1 \end{cases}$.

5. Постройте поверхность $z = 5y \cos^2(x-5) - 5y^3 e^{(y+1)}$.

6. Постройте поверхность второго порядка $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Вариант 5

$$y = \frac{1 + xe^{-x}}{2 + x^2} \sin^2(x)$$

1. Постройте график функции

2. Постройте в одной системе координат графики функций

$$y = 2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) \quad \text{и} \quad z = \cos^2(\pi x) \sin(3\pi x)$$

$$y = \begin{cases} \frac{3 + \sin(x)}{1 + x^2}, & x \leq 0 \\ 2x \cos^2(x), & x > 0 \end{cases}$$

3. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 + x^4}}, & x < 0 \\ 2 \sin^3(x), & x \in [0, 1] \\ \sqrt{1 + |2 \cos(6x)|}^{1/3}, & x > 1 \end{cases}$$

4. Постройте график функции

5. Постройте поверхность $z = 10 \operatorname{tg}^2(x^3 + 1) - \sin(x^2 - 10y)$

6. Постройте поверхность второго порядка $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$

Вариант 6

1. Постройте график функции $y = \cos(5x) \sin^2(3x) + \cos^3(3x)$

2. Постройте в одной системе координат графики функций

$$y = 3 \sin(3\pi x) \cos(2\pi x) \quad \text{и} \quad z = \cos^3(4\pi x) \sin(\pi x)$$

$$y = \begin{cases} \sqrt{1 + 2x^2 - \sin^2(x)}, & x \leq 0 \\ \frac{2 + x}{\sqrt[3]{2 + e^{-0.1x}}}, & x > 0 \end{cases}$$

3. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 0 \\ 1 + \cos(\pi x), & x \in [0, 1] \\ -(x-1)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

4. Постройте график функции

5. Постройте поверхность $z = 10x^2 \cos^5(x) - 2y^3$

6. Постройте поверхность второго порядка $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Вариант 7

1. Постройте график функции $y = \frac{1 + (x+5)^{1/3}}{1 + \sqrt{2+x+x^2}}$.
2. Постройте в одной системе координат графики функций $y = 3\sin^2(x)\cos(x)$ и $z = 2\cos^2(2x) - \sin(\pi x)$.

3. Постройте график функции $y = \begin{cases} \frac{1+2x}{1+x}, x \leq 0 \\ \sin^2 \sqrt{1+x}, x > 0 \end{cases}$.

4. Постройте график функции $y = \begin{cases} |x|, x < 0 \\ -\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}, x \in [0,1) \\ 1-x, x \geq 1 \end{cases}$.

5. Постройте поверхность $z = 7e^{0,5x-1}x^3 - 4y^4$.

6. Постройте поверхность второго порядка $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Вариант 8

1. Постройте график функции $y = 3\cos^2(2x)\sin(5x)$.
2. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \sin(3\pi x) + 2\sin(2\pi x)\cos(3\pi x)$ и $z = \cos(\pi x) - \cos(3\pi x)\sin^2(\pi x)$.

3. Постройте график функции $y = \begin{cases} \sqrt{1+|x|}, x \leq 0 \\ \frac{1+3x}{2+\sqrt[3]{1+x}}, x > 0 \end{cases}$.

4. Постройте график функции $y = \begin{cases} x + e^x, x < 0 \\ 1, x \in [0,1) \\ 1 + (x-1)^2, x \geq 1 \end{cases}$.

5. Постройте поверхность $z = x^6 - 3e^{0,7y}y^3$.

6. Постройте поверхность второго порядка $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2z$.

Вариант 9

$$y = \frac{1+x}{5 + \sqrt{|x|e^{-x} + |\cos(\pi x)|}}$$

1. Постройте график функции
2. Постройте в одной системе координат графики функций

$$y = \sin(\pi x)\cos(3\pi x) + 2\sin(3\pi x) \quad \text{и} \quad z = \cos^2(\pi x) - \cos(3\pi x).$$

3. Постройте график функции
- $$y = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+|x|}}{2+|x|}, & x \leq 0 \\ \frac{1+x}{2+\cos^3(x)}, & x > 0 \end{cases}.$$

4. Постройте график функции
- $$y = \begin{cases} 6\sqrt[3]{|x|} - 5, & x < -1 \\ x^2, & x \in [-1, 1] \\ 6\sqrt[3]{x} - 5, & x > 1 \end{cases}.$$

5. Постройте поверхность $z = \sin^2(x+1)\cos(y) - 10y^{0,5x}e^x$.

6. Постройте поверхность второго порядка $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 2z$.

Вариант 10

$$y = \frac{4+x^2e^{-3x}}{4 + \sqrt{x^4 + \sin^2(x)}}$$

1. Постройте график функции
2. Постройте в одной системе координат графики функций

$$y = 2\sin(2\pi x)\cos(\pi x) + \sin(3\pi x) \quad \text{и} \quad z = \cos(2\pi x)\sin^2(\pi x) - \cos(4\pi x).$$

3. Постройте график функции
- $$y = \begin{cases} \sqrt[3]{1+x^2}, & x \leq 0 \\ \sin^2(x) + \frac{1+x}{1+\cos^2(x)}, & x > 0 \end{cases}.$$

$$y = \begin{cases} x(x+2), x \leq -2 \\ \sin(\pi x), x \in (-2, 0) \\ x(x+2)^2, x \geq 2 \end{cases} .$$

4. Постройте график функции

5. Постройте поверхность $z = \sqrt{x} + \sin^2 y$.

6. Постройте поверхность второго порядка $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$.

ГЛАВА 2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СРЕДСТВАМИ MICROSOFT EXCEL

Раздел математики, посвященный методам сбора, анализа и обработки статистических данных для научных и практических целей, называется **математической статистикой**.

Математическая статистика имеет дело с массовыми явлениями. Она тесно связана с теорией вероятностей и базируется на ее математическом аппарате.

Статистические данные представляют собой данные, полученные в результате обследования большого числа объектов или явлений.

Математическая статистика подразделяется на две основные области: описательную и аналитическую статистику. Описательная статистика охватывает методы описания статистических данных, представления их в форме таблиц, распределений и т.п.

Аналитическая статистика или теория статистических выводов ориентирована на обработку данных, полученных в ходе эксперимента, с целью формулировки выводов, имеющих прикладное значение для самых различных областей человеческой деятельности.

Microsoft Excel оснащен средствами статистической обработки данных. И хотя Excel существенно уступает специализированным статистическим пакетам обработки данных, тем не менее этот раздел математики представлен в Excel наиболее полно. В него включены основные, наиболее часто используемые статистические процедуры: средства описательной статистики, критерии различия, корреляционные и другие методы, позволяющие проводить необходимый статистический анализ различных типов данных (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Краткая характеристика статистических функций

Функция	Описание
1	2
ДИСП.Г(число1;число2;...)	вычисляет дисперсию по генеральной совокупности
ДОВЕРИТ.НОРМ(альфа; станд_откл;размер)	возвращает доверительный интервал для среднего значения по генеральной совокупности
ДОВЕРИТ.СТЬЮДЕНТ (альфа;станд_откл;размер)	возвращает доверительный интервал для среднего генеральной совокупности, используя t-распределение Стьюдента
КОРРЕЛ(массив1;массив2)	возвращает коэффициент корреляции между двумя множествами данных
МАКС(число1;число2;...)	возвращает наибольшее значение в списке аргументов
МЕДИАНА(число1;число2;...)	возвращает медиану заданных чисел
МИН(число1;число2;...)	возвращает наименьшее значение в списке аргументов
МОДА.ОДН(число1;число2;...)	возвращает значение моды для массива или диапазона значений
НОРМ.РАСП(x;среднее; стандартное_откл; интегральная)	возвращает нормальное интегральное распределение.
СКОС(число1;число2;...)	возвращает асимметрию распределения
СРГАРМ(число1;число2;...)	возвращает среднее гармоническое
СРГЕОМ(число1;число2;...)	возвращает среднее геометрическое

Продолжение таблицы 2.1

1	2
СРЗНАЧ(число1;число2;...)	возвращает среднее арифметическое аргументов
СРОТКЛ(число1;число2;...)	возвращает среднее арифметическое абсолютных значений отклонений точек данных от среднего
СТАНДОТКЛОНА (значение1;значение2;...)	оценивает стандартное отклонение по выборке, включая числа, текст и логические значения
СТЬЮДЕНТ.ТЕСТ(массив1; массив2;хвосты;тип)	возвращает вероятность, соответствующую проверке по критерию Стьюдента
ХИ2.ТЕСТ (фактический_интервал; ожидаемый_интервал)	возвращает тест на независимость
ЧАСТОТА(массив_данных; массив_интервалов)	возвращает распределение частот в виде вертикального массива
ЭКСЦЕСС(число1;число2;...)	возвращает эксцесс множества данных

2.1 Методы обработки статистических данных

Выборочный метод. По охвату статистической совокупности исследование может быть сплошное или не сплошное. При сплошном статистическом исследовании группа наблюдения формируется путем полного охвата всех единиц изучаемого явления. Множество всех единиц наблюдения, охватываемых таким сплошным наблюдением, называется **генеральной совокупностью**.

Основным методом не сплошного наблюдения является выборочный метод. Если интересующая нас совокупность слишком многочисленна, либо ее элементы малодоступны, а также если

имеются другие причины (организационные, финансовые, физические и т.п.), не позволяющие изучать сразу все ее элементы, прибегают к изучению какой-то части этой совокупности. Эта выбранная для полного исследования группа элементов называется **выборкой** или **выборочной совокупностью**.

Выборка - это группа элементов, выбранная для исследования из всей совокупности элементов. Задача выборочного метода состоит в том, чтобы сделать правильные выводы относительно всего собрания объектов, их совокупности.

Конечной целью изучения выборочной совокупности всегда является получение информации о генеральной совокупности. Поэтому естественно стремиться сделать выборку так, чтобы она наилучшим образом представляла всю генеральную совокупность, то есть была бы репрезентативной или представительной. Для получения репрезентативной выборки необходимо четко определять, что понимается под генеральной совокупностью. Ее состав и численность зависят от объектов и целей проводимого исследования.

В тех случаях, когда генеральная совокупность недостаточно известна, обычно не удается предложить лучшего способа получения представительной выборки, чем случайный выбор. При этом случайная выборка формируется случайным отбором - из генеральной совокупности наудачу извлекается по одному объекту.

Выборочная функция распределения. Характеристики случайной величины опираются на знание закона ее распределения $F(x)$. Для практических задач такое знание - редкость. Здесь закон распределения обычно неизвестен, или известен с точностью до некоторых неизвестных параметров. В частности, невозможно рассчитать точное значение соответствующих вероятностей, так как нельзя определить количество общих и благоприятных исходов. Поэтому вводится статистическое определение вероятности. По этому определению вероятность равна отношению числа испытаний (m), в которых событие появилось, к общему количеству

произведенных испытаний (n). Такая вероятность называется **статистической частотой**.

В результате на практике сведения о законе распределения случайной величины получают независимыми многократными повторениями опыта, в котором измеряются значения интересующей исследователей случайной величины (варианты). На основе информации из полученной выборки можно построить приблизительные значения для функции распределения и других характеристик случайной величины.

Выборочной (эмпирической) функцией распределения случайной величины ζ построенной по выборке x_1, x_2, \dots, x_n , называется функция $F_n(x)$, равная доле таких значений x_i , что $x_i \leq x$, $i = 1, \dots, n$.

Другими словами $F_n(x)$, есть частота события $x_i \leq x$, в ряду x_1, x_2, \dots, x_n .

Связь между эмпирической функцией распределения и функцией распределения (теоретической функцией распределения) такая же, как связь между частотой события и его вероятностью: функция $F_n(x) \rightarrow F(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Для построения выборочной функции распределения весь диапазон изменения случайной величины X разбивают на ряд интервалов одинаковой ширины. Число интервалов обычно выбирают не менее 5 и не более 15. Затем определяют число значений случайной величины X , попавших в каждый интервал. Поделив эти числа на общее количество наблюдений n , находят относительную частоту попадания случайной величины X в заданные интервалы. По найденным относительным частотам строят гистограммы выборочных функций распределения. Если соответствующие точки относительных частот соединить ломаной линией, то полученная диаграмма будет называться **полигоном частот**. Кумулятивная кривая будет получена, если по оси абсцисс откладывать интервалы, а по оси ординат - число или доли элементов совокупности, имеющих значение, меньшее или равное заданному.

При увеличении до бесконечности размера выборки выборочные функции распределения превращаются в теоретические: гистограмма превращается в график плотности распределения, а кумулятивная кривая - в график функции распределения.

В Excel для построения выборочных функций распределения используются специальная функция **ЧАСТОТА** и процедура пакета анализа **Гистограмма**.

Функция **ЧАСТОТА** вычисляет частоты появления случайной величины в интервалах значений и выводит их как массив цифр. Функция задается в качестве формулы массива **ЧАСТОТА(массив_данных; массив_карманов)**, где:

– массив данных - это массив или ссылка на множество данных, для которых вычисляются частоты.

– массив_карманов - это массив или ссылка на множество интервалов, в которые группируются значения аргумента массив_данных.

Процедура **Гистограмма** используется для вычисления выборочных и интегральных частот попадания данных в указанные интервалы значений. Процедура выводит результаты в виде таблицы и гистограммы.

Задача 2.1


Постройте эмпирическое распределение веса студентов в килограммах для следующей выборки: 64, 57, 63, 62, 58, 61, 63, 60, 60, 61, 65, 62, 62, 60, 64, 61, 59, 59, 63, 61, 62, 58, 58, 63, 61, 59, 62, 60, 60, 58, 61, 60, 63, 63, 58, 60, 59, 60, 59, 61, 62, 62, 63, 57, 61, 58, 60, 64, 60, 59, 61, 64, 62, 59, 65.


Решение

1. В ячейку **A1** введите слово **Наблюдения**, а в диапазон **A2:E12** - значения веса студентов.

2. Выберите ширину интервала 1 кг. Тогда при крайних значениях веса 57 кг и 65 кг получится 9 интервалов. В ячейки **G1** и **G2** введите названия интервалов **Вес** и **кг** соответственно. В диапазон **G4:G12** введите граничные значения интервалов (57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65).

3. Введите заголовки создаваемой таблицы: в ячейки **H1** - **Абсолютные частоты**, в ячейки **I1** - **Относительные частоты**, в ячейки **J1** - **Накопленные частоты**.

4. Заполните столбец абсолютных частот. Для этого выделите для них блок ячеек **H4:H12** (используемая функция **ЧАСТОТА** задается в виде формулы массива). На строке формул вызовите **Мастер функций** (). В появившемся диалоговом окне **Мастер функций** выберите категорию **Статистические** и функцию **ЧАСТОТА**, после чего нажмите кнопку **ОК**. Появившееся диалоговое окно **ЧАСТОТА** (рис. 2.1) необходимо за серое поле мышью отодвинуть вправо на 1-2 см от данных (при нажатой левой кнопке). Указателем мыши в рабочее поле **Массив данных** введите диапазон данных наблюдений (**A2:E12**). В рабочее поле **Массив интервалов** мышью введите диапазон интервалов (**G4:G12**). Последовательно нажмите комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**. В столбце **H4:H12** появится массив абсолютных частот.

5. В ячейке **H13** найдите общее количество наблюдений. Табличный курсор установите в ячейку **H13**. Выполните команду **Главная – Сумма** (). Убедитесь, что диапазон суммирования указан правильно (**H4:H12**), и нажмите клавишу **Enter**. В ячейке **H13** появится число **55**.

6. Заполните столбец относительных частот. В ячейку **I4** введите формулу для вычисления относительной частоты: **=H4/H\$13**. Нажмите клавишу **Enter**. Протягиванием (за правый нижний угол при нажатой левой кнопке мыши) скопируйте введенную формулу в диапазон **I5:I12**. Получите массив относительных частот.

7. Заполните столбец накопленных частот. В ячейку **J4** скопируйте значение относительной частоты из ячейки **I4** (**0,036364**). В ячейку **J5** введите формулу: **=J4+I5**. Нажмите клавишу **Enter**. Протягиванием (за правый нижний угол при нажатой левой кнопке мыши) скопируйте введенную формулу в диапазон **J6:G12**. Получите массив накопленных частот.

8. В результате после форматирования получите таблицу, представленную на рис. 2.2.

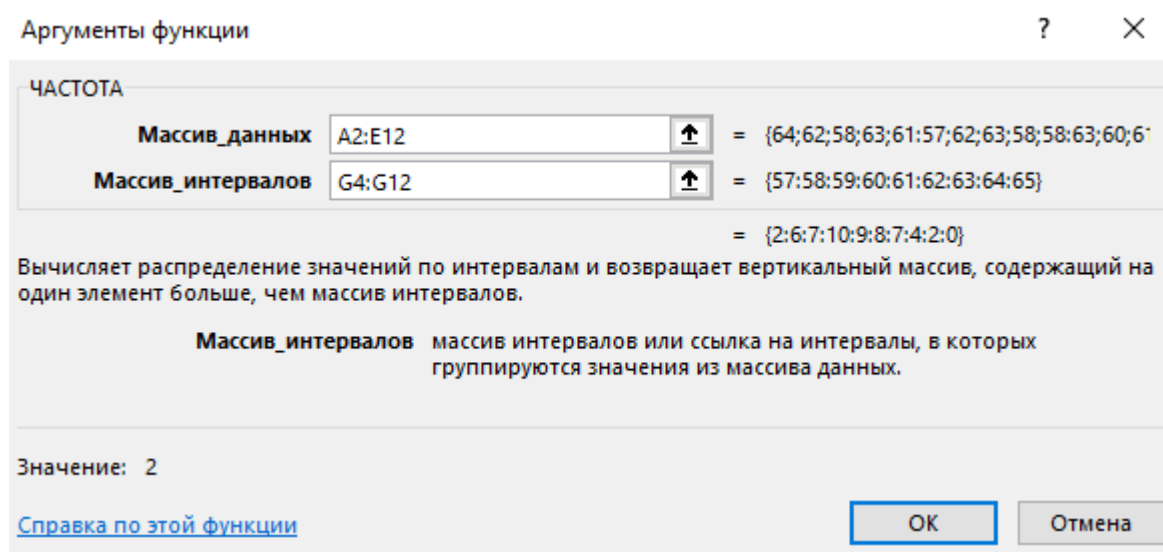


Рисунок 2.1 Заполненное диалоговое окно функции «ЧАСТОТА»

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Наблюдения						Вес, кг	Абсолютные частоты	Относительные частоты	Накопленные частоты	
2	64	62	58	63	61						
3	57	62	63	58	58		57	2	0,036	0,036	
4	63	60	61	60	60		58	6	0,109	0,145	
5	62	64	59	59	64		59	7	0,127	0,273	
6	58	61	62	60	60		60	10	0,182	0,455	
7	61	59	60	59	59		61	9	0,164	0,618	
8	63	59	60	61	61		62	8	0,145	0,764	
9	60	63	58	62	64		63	7	0,127	0,891	
10	60	61	61	62	62		64	4	0,073	0,964	
11	61	62	60	63	59		65	2	0,036	1,000	
12	65	58	63	57	65			55			
13											

Рисунок 2.2 Результат вычислений относительных и накопленных частот

9. Постройте диаграмму относительных и накопленных частот. Выделите диапазон ячеек **I4:J12** (с помощью мыши). С помощью команды – **Вставка - Диаграммы** вызовите окно **Вставка диаграммы**. В появившемся диалоговом окне выберите вкладку **Все диаграммы – Гистограмма – Гистограмма с накоплением**. Далее нажимаете кнопку **ОК**, после чего появляется диаграмма (рис. 2.3), которую нужно отформатировать.

10. Выделите диаграмму и нажмите правую кнопку мыши и из контекстного меню выберите команду **Изменить тип диаграммы**. В появившемся диалоговом окне выберите тип диаграммы **Комбинированная – Гистограмма с группировкой и график на вспомогательной оси**. Далее начните редактирование и форматирование диаграммы. Для этого снова выделите диаграмму, нажмите правую кнопку мыши и выполните команду **Выбрать данные**. В появившемся диалоговом окне выберите **Подписи горизонтальной оси (категории) – Изменить** и с помощью мыши введите диапазон **G4:G12**, затем в этом же окне выберите команду **Элементы легенды (ряды) – Ряд1 - Изменить** и в появившемся окне с помощью мыши в поле **Изменение ряда** введите диапазон **\$I\$1:\$I\$3**. Аналогичным образом измените **Ряд2** на диапазон ячеек **\$J\$1:\$J\$3**. С помощью контекстного меню подпишите ось X (категорий) – **Вес**; Ось Y (значений) – **Относительная частота**; Вторая ось Y (значений) – **Накопительная частота**.

11. После минимального редактирования диаграмма будет иметь такой вид, как на рис. 2.4.

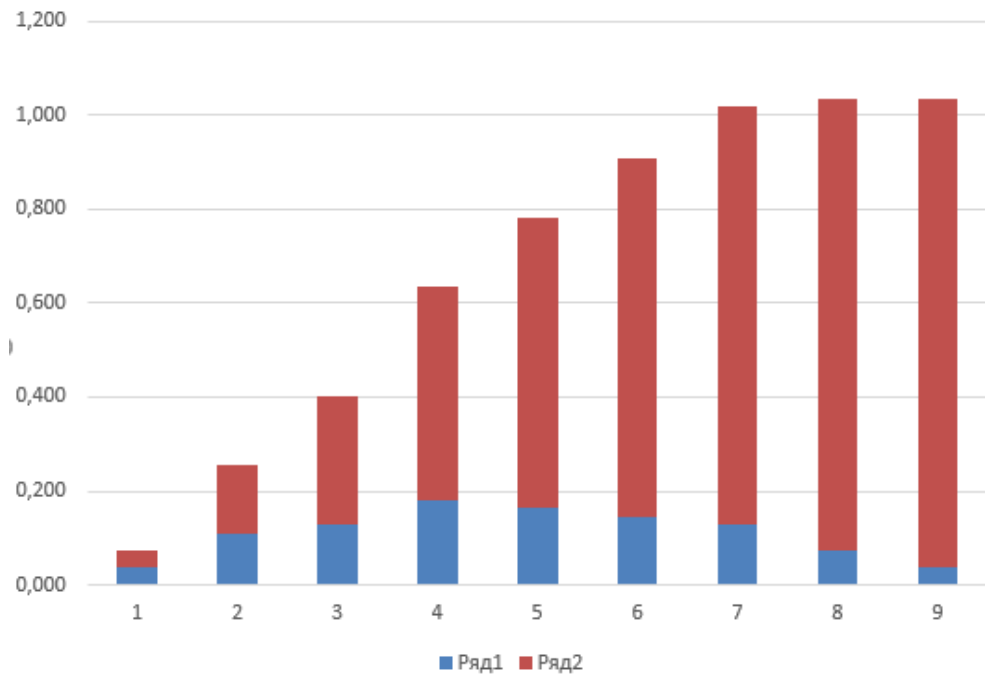


Рисунок 2.3 Первоначальный вид диаграммы

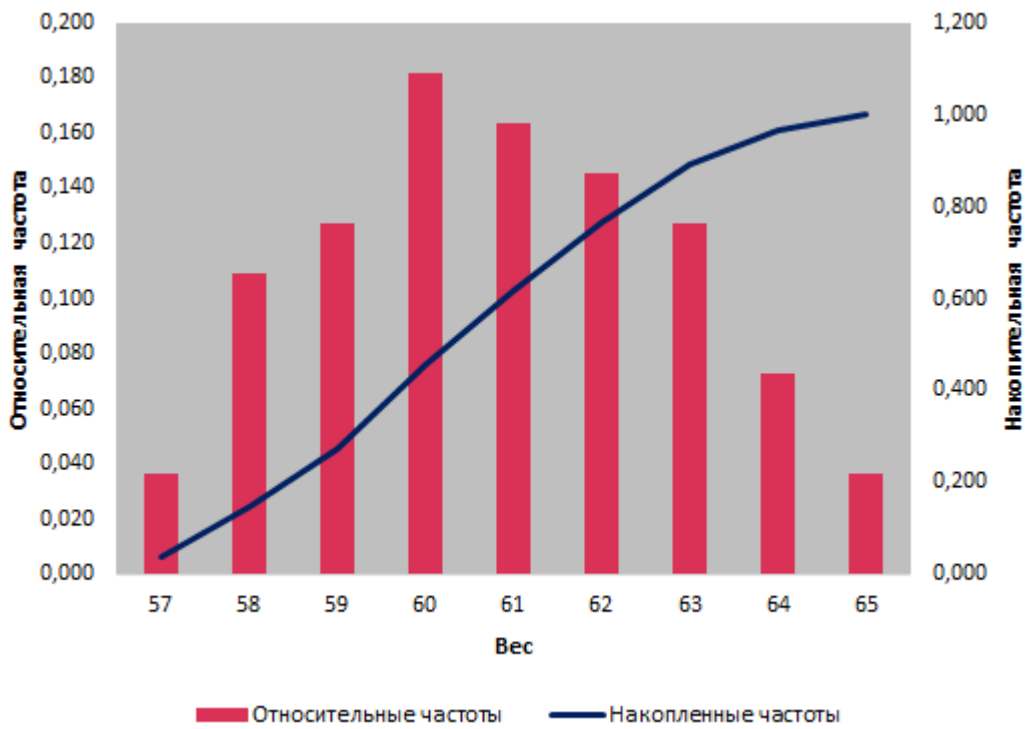


Рисунок 2.4 Диаграмма относительных и накопленных частот

Задача 2.2

Для данных из примера 2.1 построить эмпирические распределения, воспользовавшись процедурой Гистограмм.

Решение

1. В ячейку **A1** введите слово **Наблюдения**, а в диапазон **A2:E12** - значения всех студентов.

2. Для вызова процедуры **Гистограмма** выполните команду **Файл – Параметры – Надстройки – Надстройки Excel – Перейти – Пакет анализа** (рис. 2.5). Далее выполните команду **Данные – Анализ данных – Гистограмма** (рис. 2.6).

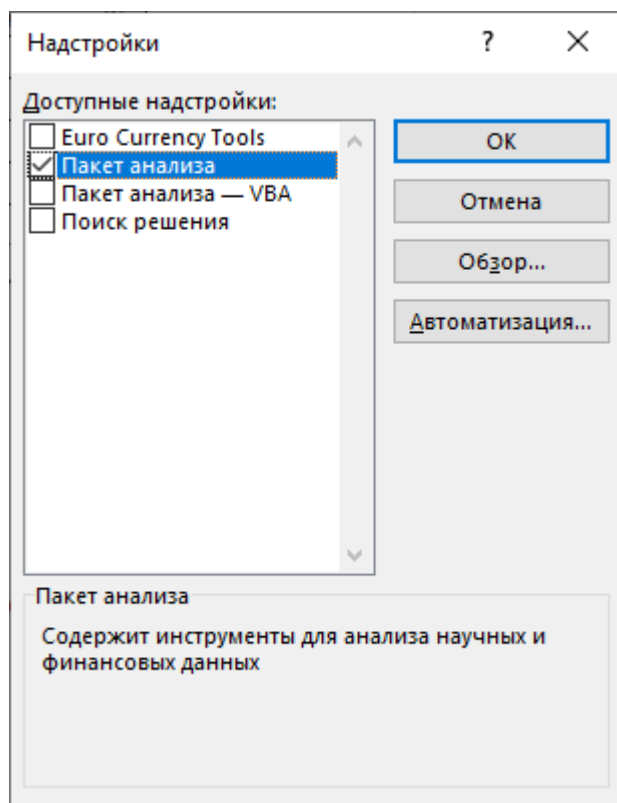


Рисунок 2.5 Диалоговое окно для выбора «Надстройки»

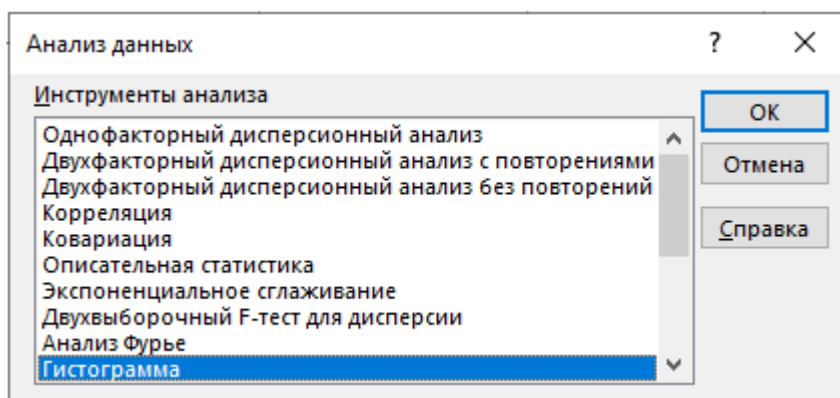


Рисунок 2.6 Диалоговое окно для выбора «Анализ данных»

3. В появившемся окне **Гистограмма** заполните рабочие поля (рис. 2.7).

– во **Входной интервал** введите диапазон исследуемых данных (**A2:E12**);

– в **Выходной интервал** - ссылку на левую верхнюю ячейку выходного диапазона (**F1**). Установите переключатели в положение **Интегральный процент** и **Вывод графика**;

После этого нажмите кнопку **ОК**.

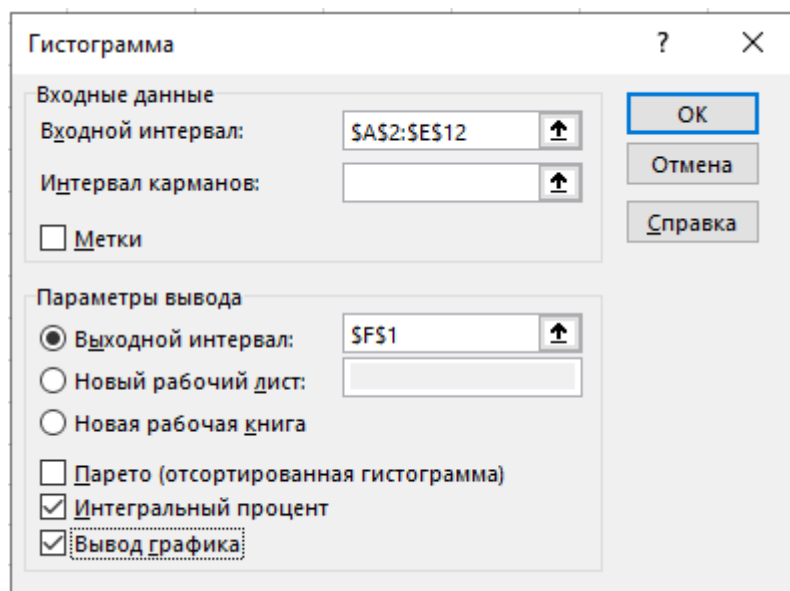


Рисунок 2.7 Заполненное диалоговое окно инструмента «Гистограмма»

Как видно, диаграмма на рис. 2.8 несколько отличается от диаграммы на рис. 2.4. Это объясняется тем, что диапазон карманов не был введен. Количество и границы интервалов определялись в процедуре **Гистограмма** автоматически. Если бы рабочее поле **Интервал карманов** был бы введен диапазон ячеек, определяющих выбранные интервалы, как задаче 2.1 (57, 58, 59, ..., 65), то полученная диаграмма была бы идентична предыдущей.

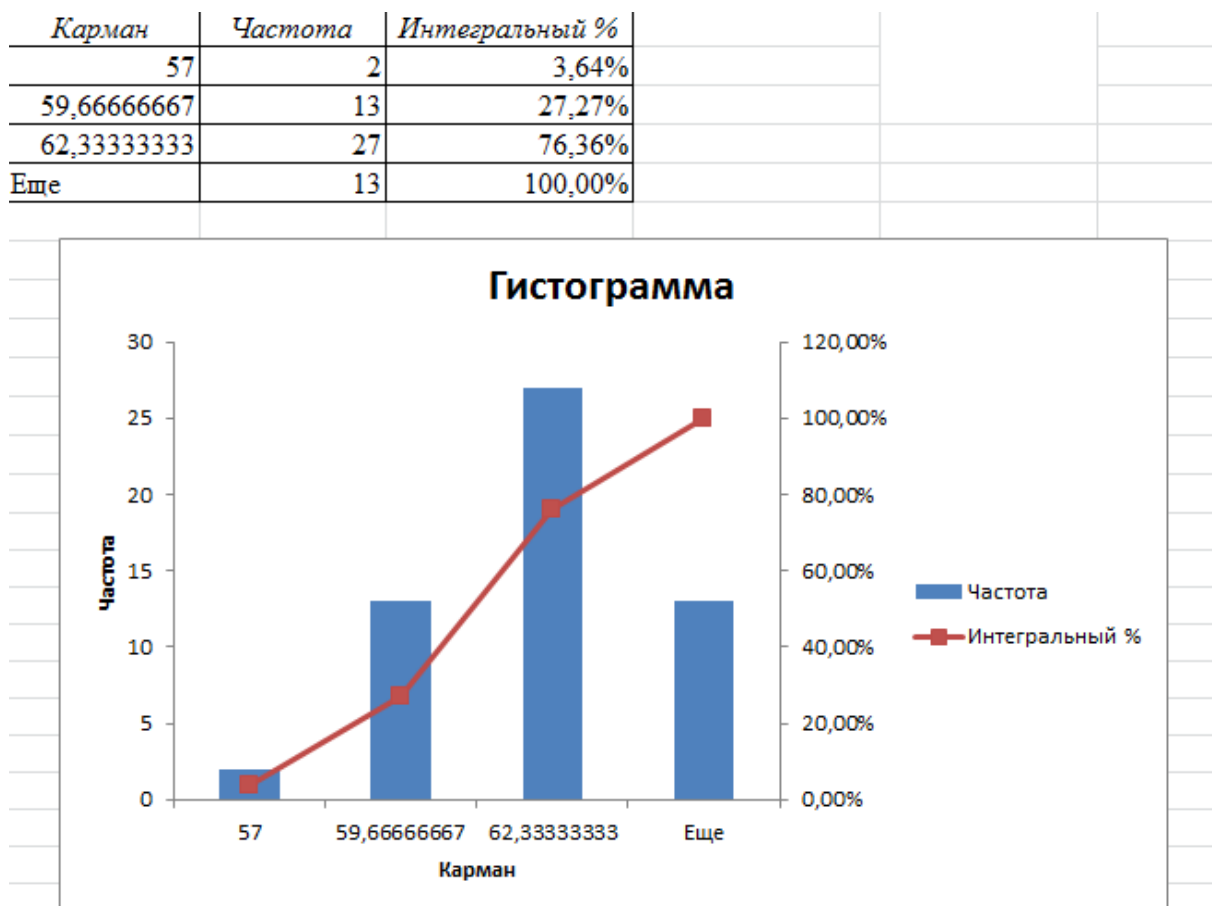


Рисунок 2.8 Полученные таблица и диаграмма

Упражнения

1. Постройте эмпирические функции распределения (относительные и накопительные частоты) для роста (в см) группы на 20 мужчин: 181, 160, 178, 178, 171, 171, 172, 181, 173, 168, 174, 167, 169, 171, 179, 181, 181, 183, 172, 176.

2. Найдите распределение по абсолютным частотам для следующих результатов тестирования в баллах: 79, 85, 78, 85, 83, 81, 95, 88 и 97 (используйте транш интервалов 70, 79, 89).

3. Постройте эмпирические функции распределения (абсолютные и накопленные частоты) успеваемости в группе на 20 студентов. 4, 4, 5, 3, 4, 5, 4, 5, 3, 5, 3, 3, 5, 4, 5, 4, 3, 5, 3, 5.

2.2 Выборочные характеристики

Выборочные характеристики являются оценками соответствующих, характеристик генеральной совокупности. Среди выборочных характеристик выделяют показатели, относящиеся к центру распределения (меры положения), показатели рассеяния вариант (меры рассеяния) и меры формы распределения. К показателям, характеризующим центр распределения, относят различные виды средних (арифметическое, геометрическое и т. п.), а также моду и медиану.

Простейшим показателем, характеризующим центр выборки, является мода. **Мода** - это элемент выборки с наиболее часто встречающимся значением (наиболее вероятная величина).

Средним значением выборки, или выборочным аналогом математического ожидания, называется величина

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i .$$

Иначе говоря, **среднее значение** - это центр выборки, вокруг которого группируются элементы выборки. При увеличении числа наблюдений среднее приближается к математическому ожиданию. Среднее значение обозначается также буквой **M**.

Выборочная медиана - это число, которое является серединой выборки, то есть половина чисел имеет значения большие, чем медиана, а половина чисел имеет значения меньшие, чем медиана.

Основными показателями рассеяния вариант являются интервал, дисперсия выборки, стандартное отклонение и стандартная ошибка.

Интервал (амплитуда, вариационный размах) - это разница между максимальным и минимальным значениями элементов выборки. Интервал является простейшей и наименее надежной мерой вариации или рассеяния элементов в выборке.

Дисперсия выборки - это параметр, характеризующий степень разброса элементов выборки относительно среднего значения. Чем больше дисперсия, тем дальше отклоняются значения элементов выборки от среднего значения.

Выборочное стандартное отклонение (среднее квадратичное отклонение) - это параметр, характеризующий степень разброса элементов выборки относительно среднего значения. Чем больше среднее квадратичное отклонение, тем дальше отклоняются значения элементов выборки от среднего значения.

Стандартная ошибка - это параметр, характеризующий степень возможного отклонения среднего значения, полученного на исследуемой ограниченной выборке, от истинного среднего значения, полученного на всей совокупности элементов.

Показателями, характеризующими форму распределения, являются выборочные эксцесс и асимметрия.

Эксцесс — это степень выраженности «хвостов» распределения, то есть частоты появления удаленных от среднего значений.

Асимметрия - величина, характеризующая несимметричность распределения элементов выборки относительно среднего значения. Принимает значения от -1 до 1. В случае симметричного распределения асимметрия равна 0.

Задача 2.3


Рассматриваются ежемесячные количества реализованных турфирмой путевок за периоды до и после начала активной рекламной компании. Ниже приведены количества реализованных путевок по месяцам.

С рекламой	Без рекламы
162	135
156	126
144	115
137	140
125	121
145	112
151	130

Требуется найти средние значения и стандартные отклонения этих данных.

Решение

1. Для проведения статистического анализа, прежде всего необходимо ввести данные в рабочую таблицу. Откройте новую рабочую таблицу. Введите в ячейку **A1** слово **Реклама**, затем в ячейки **A2:A8** - соответствующие значения числа реализованных путевок. В ячейку **B1** введите слова **Без рекламы**, а в **B2:B8** - значения числа реализованных путевок до начала рекламной компании. Отметим, что рассматриваемые группы данных со статистической точки зрения являются выборками.

2. При статистическом анализе, прежде всего необходимо определить характеристики выборки, и важнейшей характеристикой является среднее значение. Для определения среднего значения в контрольной группе необходимо установить табличный курсор в свободную ячейку (**A9**). На строке формул нажмите кнопку **Вставка функции** (). в появившемся диалоговом окне **Мастер функций** выберите категорию **Статистические** и функцию **СРЗНАЧ**, после чего нажмите кнопку **ОК**. Появившееся диалоговое окно **СРЗНАЧ** за серое поле мышью отодвиньте вправо на 1 -2 см от данных (при нажатой левой кнопке). Указателем мыши введите диапазон данных контрольной группы для определения среднего значения (**A2:A8**).

Нажмите кнопку **ОК**. В ячейке **A9** появится среднее значение выборки - **145,714** (рис. 2.9).

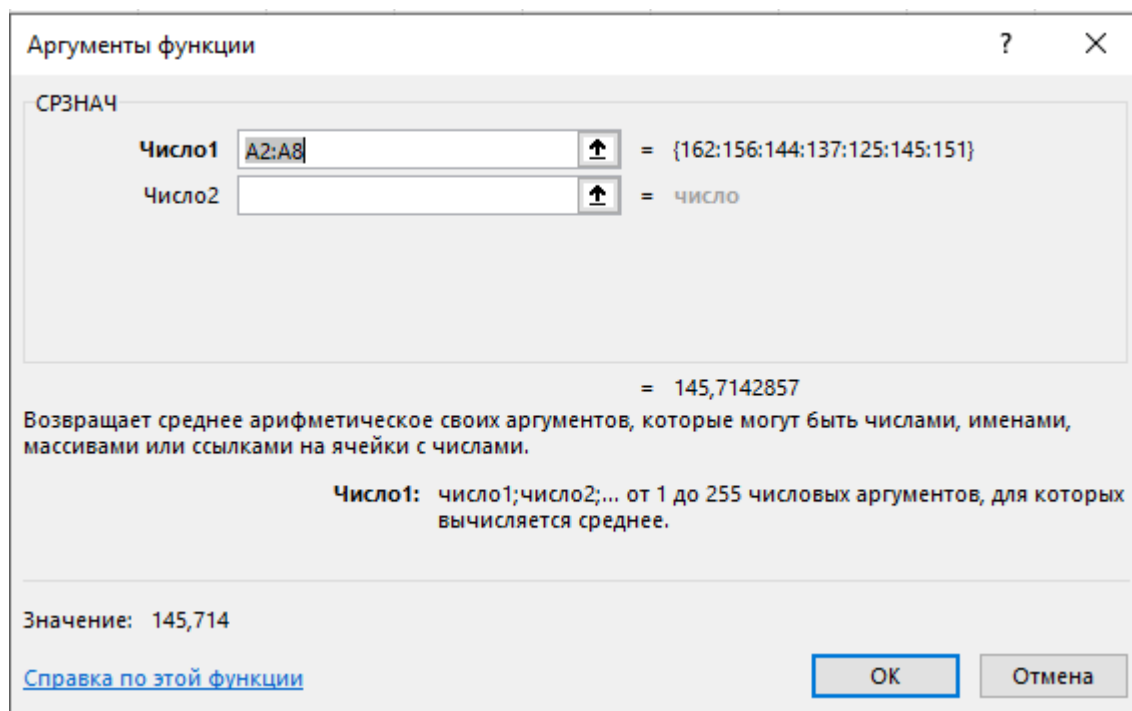



Рисунок 2.9 Заполненное диалоговое окно функции «СРЗНАЧ»

В качестве упражнения определите в ячейке **B9** среднее значение числа реализованных путевок без активной рекламы. Для этого табличный курсор установите в ячейку **B9**. Аналогичным образом найдите среднее значение выборки – **125,571**.

3. Следующей по важности характеристикой выборки является мера разброса элементов выборки от среднего значения. Такой мерой является среднее квадратичное или стандартное отклонение. Для определения стандартного отклонения в контрольной группе необходимо установить табличный курсор в свободную ячейку (**A10**). На строке формул нажмите кнопку **Вставка функции** () в появившемся диалоговом окне **Мастер функций** выберите категорию **Статистические** и функцию **СТАНДОТКЛОНА**, после чего нажмите кнопку **ОК**. Появившееся диалоговое окно **СТАНДОТКЛОНА** за серое поле мышью отодвиньте вправо на 1-2 см от данных (при нажатой левой кнопке).

Указателем мыши введите диапазон данных контрольной группы для определения стандартного отклонения (**A2:A8**). Нажмите кнопку **ОК**. В ячейке **A10** появится стандартное отклонение выборки – **12,298**. Существует правило, согласно которому при отсутствии артефактов данные должны лежать в диапазоне $M \pm 3\sigma$ (в примере **145,7±36,9**).

В качестве упражнения требуется в ячейке **B10** определить стандартное отклонение числа проданных путевок до начала рекламной компании. В ячейке **B10** появится стандартное отклонение выборки – **10,277**.

Решение задачи должно выглядеть следующим образом:

	A	B	C
1	Реклама	Без рекламы	
2	162	135	
3	156	126	
4	144	115	
5	137	140	
6	125	121	
7	145	112	
8	151	130	
9	145,714	125,571	
10	12,298	10,277	
11			

Рисунок 2.10 Конечный результат решения

Упражнения

1. Найдите среднее значение и стандартное отклонение результатов бега на дистанцию 100 м у группы студенты: 12,8; 13,2; 13,0; 12,9; 13,5; 13,1.

2. Найдите выборочные среднее, медиану, моду, дисперсию и стандартное отклонение для следующей выборки 26, 35, 29, 27, 33, 35, 30, 33, 31, 29.

Примечание: при решении используйте статистические функции.

2.3 Использование инструментов Пакета анализа

В пакете Excel помимо мастера функций имеется набор более мощных инструментов для работы с несколькими выборками и углубленного анализа данных, называемый **Пакет анализа**, который может быть использован для решения задач статистической обработки выборочных данных.

Для установки раздела **Анализ данных** в пакете Excel выполните команду **Файл – Параметры – Надстройка -Пакет анализа**.

Задача 2.4

Рассматривается зарплата основных групп работников гостиницы: администрации, обслуживающего персонала и работников ресторана. Были получены следующие данные:

Администрация	Персонал	Ресторан
4500	2100	3200
4000	2100	3000
3700	2000	2500
3000	2000	2000
2500	1900	1900
	1800	1800
	1800	

Необходимо определить основные статистические характеристики в группах данных.

Решение

1. Для использования инструментов анализа исследуемые данные следует представить в виде таблицы, где столбцами

являются соответствующие показатели. Значения зарплат сотрудников администрации введите в диапазон **A1:A6**, обслуживающего персонала - в диапазон **B1:B8** и т. д. В результате получится таблица, представленная на рис. 2.11.

	А	В	С
1	Администрация	Персонал	Ресторан
2	4500	2100	3200
3	4000	2100	3000
4	3700	2000	2500
5	3000	2000	2000
6	2500	1900	1900
7		1800	1800
8		1800	

Рисунок 2.11 Исходные данные для решения задачи

2. Далее необходимо провести элементарную статистическую обработку. Для этого выполните команду **Файл – Параметры – Надстройки – Надстройки Excel – Перейти – Пакет анализа**. Далее выполните команду **Данные – Анализ данных – Описательная статистика** (рис. 2.12).

3. В появившемся диалоговом окне (рис. 2.13) в рабочем поле **Входной интервал** укажите сходной диапазон **\$A\$2:\$C\$8**. Активировав переключателем рабочее поле **Выходной интервал**, укажите выходной диапазон - ячейку **A9**. В разделе **Группирование** переключатель установите положение **по столбцам**. Установите флажок в поле **Итоговая статистика** и нажмите кнопку **ОК**.

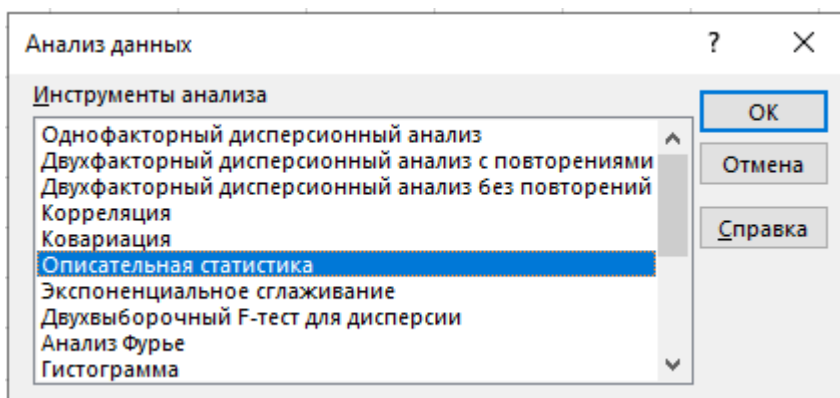


Рисунок 2.12 Диалоговое окно для выбора инструмента «Описательная статистика»

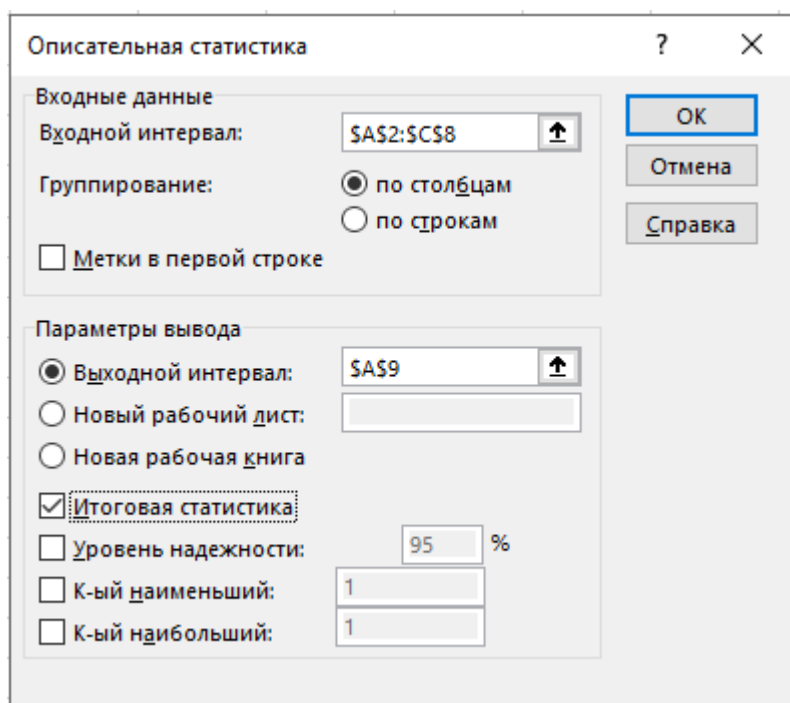


Рисунок 2.13 Заполненное диалоговое окно инструмента «Описательная статистика»

В результате анализа (рис. 2.14) в указанном выходном диапазоне для каждого столбца данных получим соответствующие результаты.

9	Столбец1		Столбец2		Столбец3	
10						
11	Среднее	3540	Среднее	1957,143	Среднее	2400
12	Стандартная ошибка	355,8089375	Стандартная оши	48,09288	Стандартн	243,5843
13	Медиана	3700	Медиана	2000	Медиана	2250
14	Мода	#Н/Д	Мода	2100	Мода	#Н/Д
15	Стандартное отклонение	795,6129712	Стандартное откл	127,2418	Стандартн	596,6574
16	Дисперсия выборки	633000	Дисперсия выбор	16190,48	Дисперси	356000
17	Эксцесс	-1,29384635	Эксцесс	-1,71488	Эксцесс	-2,06887
18	Асимметричность	-0,245024547	Асимметричность	-0,2219	Асимметр	0,457606
19	Интервал	2000	Интервал	300	Интервал	1400
20	Минимум	2500	Минимум	1800	Минимум	1800
21	Максимум	4500	Максимум	2100	Максимум	3200
22	Сумма	17700	Сумма	13700	Сумма	14400
23	Счет	5	Счет	7	Счет	6
24						

Рисунок 2.14 Результаты работы инструмента «Описательная статистика»

Полученные характеристики означают:

- минимум - значение минимального элемента выборки;
- максимум - значение максимального элемента выборки;
- сумма - сумма значений всех элементов выборки;
- счет - количество элементов в выборке.

Среди этих характеристик наиболее важными являются показатели **Среднее**, **Стандартная ошибка (среднего)** и **Стандартное отклонение**.

Упражнения

1. Найдите наиболее популярный туристический маршрут из четырех реализуемых фирмой (моду), если за неделю последовательно были реализованы следующие маршруты (приводятся номера маршрутов): 1, 3, 3, 2, 1, 1, 4, 4, 2, 4, 1, 3, 2, 4, 1, 4, 4, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 1, 3.

2. В рабочей зоне производились замеры концентрации вредного вещества. Получен ряд значений (в мг/м³): 12, 16, 15, 14, 10, 20. 16. 14, 18, 14, 15, 17, 23, 16. Необходимо определить основные выборочные характеристики.

2.4 Проверка статистических гипотез

Помимо описательной статистики, важной областью является также аналитическая статистика. Аналитическая статистика или теория статистических выводов ориентирована на обработку данных, полученных в ходе эксперимента, с целью формулировки выводов, имеющих прикладное значение. Здесь решается вопрос, отражают ли наблюдаемые данные объективно существующую реальность. Указанный вопрос решается проверкой соответствующих статистических гипотез. При этом могут выявляться достоверности различий между выборками, взаимосвязи между выборками, влияющие факторы и т.п.

Статистическая гипотеза - это предположение о виде или отдельных параметров распределения вероятностей, которое подлежит проверке на имеющихся данных.

Проверка статистических гипотез - это процесс формирования решения о возможности принять или отвергнуть утверждение (гипотезу), основанный на информации, полученной из анализа выборки. Методы проверки гипотез называются критериями.

Уровень значимости - максимальное значение вероятности появления события, при котором событие считается практически невозможным.

Интервал, в котором с заданной доверительной вероятностью $P=1-\alpha$ находится оцениваемый параметр, называется **доверительным интервалом**.

Анализ одной выборки. Одним из важных вопросов, возникающих при анализе выборки, является вопрос: относится ли та или иная варианта к данной статистической совокупности? Решение вопроса не представляет сложности, если распределение в этой совокупности является нормальным. Для этого достаточно использовать правило трех сигм. Согласно этому правилу, в пределах $M \pm 3\sigma$ находится 99,7% всех вариантов. Поэтому, если

варианта попадает в этот интервал, то она считается принадлежащей к данной совокупности. Если не попадает, то она может быть отброшена. Хотя этот метод и предполагает нормальность исходного распределения, на практике он успешно работает и может быть использован в большинстве других случаев.

Построение доверительных интервалов для среднего. Еще одной важной задачей, возникающей при анализе одной выборки, является сравнение выборочного среднего арифметического со средним значением генеральной совокупности. Эта задача решается с помощью статистических критериев. При этом выясняется, значимо ли отличие выборочного среднего значения от среднего значения генеральной совокупности, из которой предположительно взята выборка, или наблюдаемое различие является случайным.

Проверка соответствия теоретическому распределению. Следующей задачей, возникающей при анализе одной выборки, является оценка меры соответствия (расхождения) полученных эмпирических данных и каких-либо теоретических распределений. Это связано с тем, что в большинстве случаев при решении реальных задач закон распределения и его параметры неизвестны. В то же время применяемые статистические методы в качестве предпосылок часто требуют определенного закона распределения.

Наиболее часто проверяется предположение о нормальном распределении генеральной совокупности, поскольку большинство статистических процедур ориентировано на выборки, полученные из нормально распределенной генеральной совокупности.

Для оценки соответствия имеющихся экспериментальных данных нормальному закону распределения обычно используют графический метод, выборочные параметры формы распределения и критерии согласия.


Задача 2.5

Найти границы 95%-ного доверительного интервала для среднего значения, если у 25 телефонных аккумуляторов среднее

время разряда в режиме ожидания составило 140 часов, а стандартное отклонение – 2,5 часа.

Решение

1. Откройте новую рабочую таблицу. Установите табличный курсор в ячейку **A1**.

2. Для определения границ доверительного интервала необходимо в строке формул нажать кнопку **Мастер функции** () . В появившемся диалоговом окне **Мастер функций** выберите категорию **Статистические** и функцию **ДОВЕРИТ.НОРМ**, после чего нажмите кнопку **ОК**.

3. В рабочие поля появившегося диалогового окна **ДОВЕРИТ.НОРМ** с клавиатуры введите условия задачи: **Альфа - 0,05; Станд_откл - 2,5; Размер -25** (рис. 2.15). Нажмите кнопку **ОК**.

4. В ячейке **A1** появится полуширина 95%-ного доверительного интервала для среднего значения выборки - **0,979981**. Другими словами, с 95%-ным уровнем надежности можно утверждать, что средняя продолжительность разряда аккумулятора составляет **140 ± 0,979981** часа или от **139,02** до **140,98** часа.

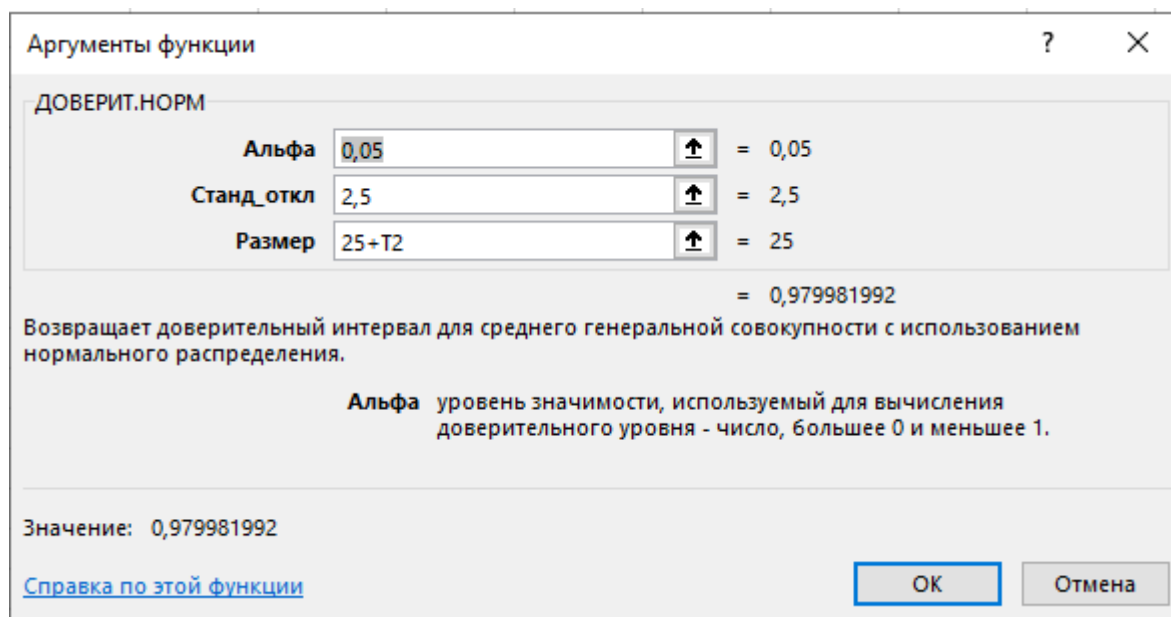


Рисунок 2.15 Заполненное диалоговое окно функции «ДОВЕРИТ.НОРМ»

Задача 2.6

Пусть имеется выборка, содержащая числовые значения: 13, 15, 17, 19, 22, 25, 19. Необходимо определить границы 95%-ного доверительного интервала для среднего значения и для нахождения «выскакивающей» варианты.

Решение

1. В диапазон **A1:A7** введите исходный ряд чисел.
2. Далее вызовите процедуру **Описательная статистика**. Для этого, указав курсором мыши на пункт меню **Данные**, выберите команду **Анализ данных**. Затем в появившемся списке выберите строку **Описательная статистика**.
3. В появившемся диалоговом окне в рабочее поле **Входной интервал**: укажите входной диапазон - **A1:A7**. Переключателем активизируйте **Выходной интервал** и укажите ячейку **B1**. В разделе **Группировка** переключатель установите в положение **по столбцам**. Установите флажок в левое поле **Уровень надежности**: и в правом поле (%) - **95**. Затем нажмите кнопку **ОК** (рис. 2.16).

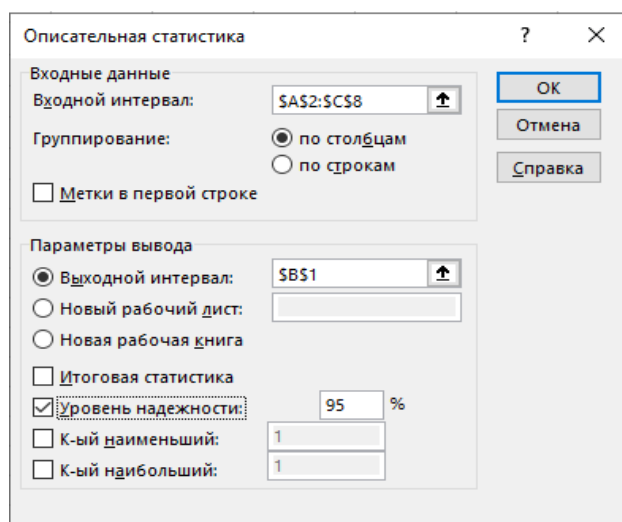



Рисунок 2.16 Заполненное диалоговое окно инструмента «Описательная статистика»

4. В результате анализа в указанном выходном диапазоне для доверительной вероятности **0,95** получаем значения доверительного интервала (рис. 2.17).

	A	B	C	D
1	13	<i>Столбец1</i>		
2	15			
3	17	Уровень надежности(95,0%)	3,770	
4	19			
5	22			
6	25			
7	19			
8				

Рисунок 2.17 Исходная выборка и результат вычислений

Уровень надежности - это половина доверительного интервала для генерального среднего арифметического. Из полученного результата следует, что с вероятностью **0,95** среднее арифметическое для генеральной совокупности находится в интервале **18,571±3,77**. Здесь **18,571** - выборочное среднее **M** для рассматриваемого примера, которое находится обычно процедурой **Описательная характеристика** одновременно с доверительным интервалом.

5. Для нахождения доверительных границ для «выскакивающей» варианты необходимо полученный выше доверительный интервал умножить на \sqrt{n} (в примере - $\sqrt{7}$, то есть $3,77 * \sqrt{7} = 9,975$). В Excel это можно выполнить следующим образом. Табличный курсор установите в свободную ячейку **C4**; введите с клавиатуры знак =; мышью укажите на ячейку **C3** (в которой находится результат вычислений); введите с клавиатуры знак *; на строке формул вызовите **Мастер функций** (); выберите категорию **Математические**, тип функции **Корень**; нажмите **ОК**; введите с клавиатуры число **7** и нажмите **ОК**. В результате получим в ячейке **C4** значение доверительного интервала – **9,975** (рис. 2.18).

	A	B	C	D
1	13	<i>Столбец1</i>		
2	15			
3	17	Уровень надежности(95,0%)	3,770	
4	19		9,975	
5	22			
6	25			
7	19			
8				

Рисунок 2.18 Результат доверительных Границ для «выскакивающей» варианты

Таким образом, варианта, попадающая в интервал $18,571 \pm 9,975$, считается принадлежащей данной совокупности с вероятностью $0,95$. Выходящая за эти границы может быть отброшена с уровнем значимости $\alpha=0,05$.

Задача 2.7

Проверить соответствие выборочных данных 64, 57, 63, 62, 58, 61, 63, 60, 60, 61, 65, 62, 62, 60, 64, 61, 59, 59, 63, 61, 62, 58, 58, 63, 61, 59, 62, 60, 60, 58, 61, 60, 63, 63, 58, 60, 59, 60, 59, 61, 62, 62, 63, 57, 61, 58, 60, 64, 60, 59, 61, 64, 62, 59, 65 нормальному закону распределения.

Решение

1. Повторите пункты 1-7 решения задачи 2.1. В результате получится таблица (рис. 2.19).

2. Найдите теоретические частоты нормального распределения. Для этого предварительно необходимо найти среднее значение и стандартное отклонение выборки.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Наблюдения						Вес,	Абсолютные	Относительные	Накопленные
2	64	62	58	63	61		кг	частоты	частоты	частоты
3	57	62	63	58	58					
4	63	60	61	60	60		57	2	0,036	0,036
5	62	64	59	59	64		58	6	0,109	0,145
6	58	61	62	60	60		59	7	0,127	0,273
7	61	59	60	59	59		60	10	0,182	0,455
8	63	59	60	61	61		61	9	0,164	0,618
9	60	63	58	62	64		62	8	0,145	0,764
10	60	61	61	62	62		63	7	0,127	0,891
11	61	62	60	63	59		64	4	0,073	0,964
12	65	58	63	57	65		65	2	0,036	1,000
13								55		

Рисунок 2.19 Результат вычислений относительных и накопленных частот

В ячейке **I13** с помощью функции **СРЗНАЧ** найдите среднее значение для данных из диапазона **A2:E12 (60,855)**. В ячейке **J13** с помощью функции **СТАНДОТКЛОНА** найдите стандартное отклонение для этих же данных (**2,05**). В ячейки **K1** и **K2** введите название столбца - **Теоретические частоты**. Затем с помощью функции **НОРМ.РАСП** найдите теоретические частоты. Установите курсор в ячейку **K4**, вызовите указанную функцию и заполните ее рабочие поля: **x** - **C4**; **Среднее** - **\$I\$13**; **Стандартное_откл** - **\$J\$13**. **Интегральная** - **0**. Получим в ячейке **K4** - **0,033**. Далее протягиванием скопируйте содержимое ячейки **K4** в диапазон ячеек **K5:K12**. Затем в ячейки **L1** и **L2** введите название нового столбца - **Теоретические частоты**. Установите курсор в ячейку **L4** и введите формулу **=H\$13*K4**. Далее протягиванием скопируйте содержимое ячейки **L4** в диапазон ячеек **L5:L12**. Результаты вычислений представлены на рис. 2.20.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Наблюдения						Вес,	Абсолютные	Относительные	Накопленные	Теоретические	Теоретические
2	64	62	58	63	61		кг	частоты	частоты	частоты	частоты	частоты
3	57	62	63	58	58							
4	63	60	61	60	60		57	2	0,036	0,036	0,033205828	1,82632055
5	62	64	59	59	64		58	6	0,109	0,145	0,073795567	4,058756212
6	58	61	62	60	60		59	7	0,127	0,273	0,129258576	7,109221655
7	61	59	60	59	59		60	10	0,182	0,455	0,178443849	9,814411704
8	63	59	60	61	61		61	9	0,164	0,618	0,194158732	10,67873029
9	60	63	58	62	64		62	8	0,145	0,764	0,16650428	9,157735407
10	60	61	61	62	62		63	7	0,127	0,891	0,112540024	6,189701326
11	61	62	60	63	59		64	4	0,073	0,964	0,059951732	3,297345259
12	65	58	63	57	65		65	2	0,036	1,000	0,025171529	1,384434082
13								55	60,855	2,050		0,9842
14												

Рисунок 2.20 Результаты вычисления теоретических частот и частот

3. С помощью функции **ХИ2.ТЕСТ** определите соответствие данных нормальному закону распределения. Для этого установите табличный курсор в свободную ячейку **L3**. На строке формул нажмите кнопку **Вставка функции** (f_x). В появившемся диалоговом окне **Мастер функций** выберите категорию **Статистические** и функцию **ХИ2.ТЕСТ**, после чего нажмите кнопку **ОК**. Появившееся диалоговое окно **ХИ2.ТЕСТ** отодвиньте вправо на 1- 2 см от данных. Указателем мыши в рабочие поля введите фактический **H4:H12** и ожидаемые **L4:L12** диапазоны частот (рис. 2.21). Нажмите кнопку **ОК**. В ячейке **L13** появится значение вероятности того, что выборочные данные соответствуют нормальному закону распределения - **0,9842**.

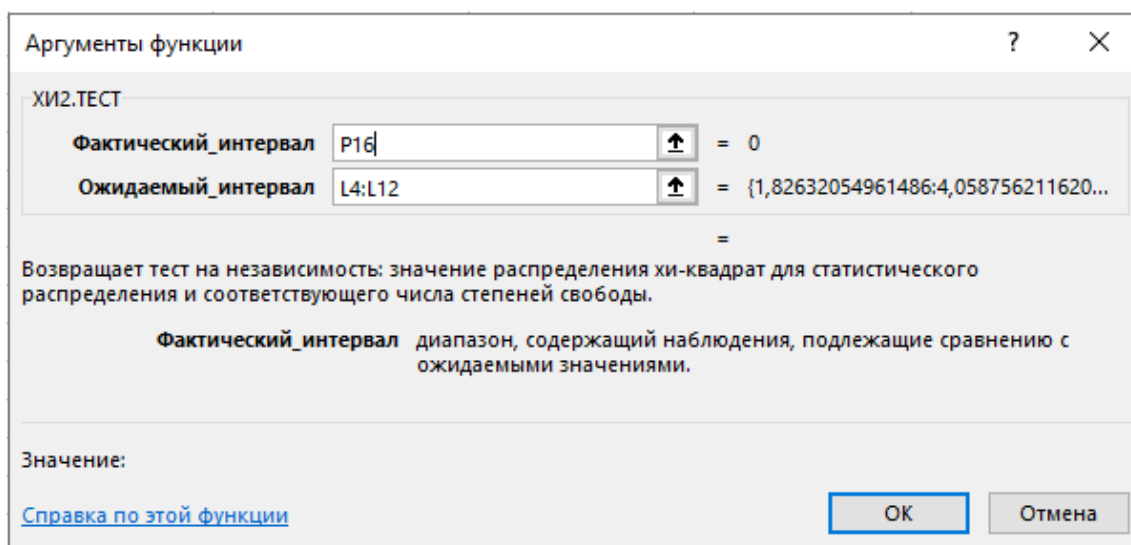


Рисунок 2.21 Заполненное диалоговое окно функции «ХИ2.ТЕСТ»

критерии. Правильный выбор критерия определяется как спецификой данных к проверяемым гипотез, так и уровнем статистической подготовки исследователя.

Статистические критерии различия подразделяются на параметрические и непараметрические критерии. Параметрические критерии служат для проверки гипотез о параметрах определенных распределений генеральной совокупности. Непараметрические критерии для проверки гипотез не используют предположений о законе распределения генеральной совокупности и не требуют знания параметров распределения.

Параметрические критерии. Параметрические критерии служат для проверок гипотез о положении и рассеивании. Из параметрических критериев наибольшей популярностью при проверке гипотез о равенстве генеральных средних (математических ожиданий) пользуется t-критерий Стьюдента (t-критерий различия).

Критерий Стьюдента (t) наиболее часто используется для проверки гипотезы «Средние двух выборок относятся к одной и той же совокупности». Критерий позволяет найти вероятность того, что оба средних относятся к одной и той же совокупности. Если эта вероятность p ниже уровня значимости ($p < 0,05$), то принято считать, что выборки относятся к двум разным совокупностям.

Критерий Фишера. Критерий Фишера используют для проверки гипотезы о принадлежности двух дисперсий одной генеральной совокупности и, следовательно, их равенстве. При этом предполагается, что данные независимы и распределены по нормальному закону. Гипотеза о равенстве дисперсий принимается, если отношение большей дисперсии к меньшей меньше критического значения распределения Фишера.

Непараметрические критерии. Непараметрические критерии используются в тех случаях, когда закон распределения данных отличается от нормального или неизвестен.

Критерий согласия χ^2 . Бывают ситуации, когда необходимо сравнить две относительные или выраженные в процентах величины (доли).

Задача 2.8

Выявить, достоверны ли отличия при сравнении данных реализации турфирмой путевок за периоды до и после начала активной рекламной компании.


С рекламой	Без рекламы
162	135
156	126
144	115
137	140
125	121
145	112
151	130

Решение

1. Введите данные по предложенному образцу.

	А	В
1	Реклама	Без рекламы
2	162	135
3	156	126
4	144	115
5	137	140
6	125	121
7	145	112
8	151	130
9		

Рисунок 2.22 Исходные данные для решения задачи

2. Для выявления достоверности отличий табличный курсор установите в свободную ячейку (A11). На строке формул нажмите кнопку **Вставка функции** (). В появившемся диалоговом окне **Мастер функций** выберите категорию **Статистические** и функцию **СТЮДЕНТ.ТЕСТ**, после чего нажмите кнопку **ОК**. Появившееся

диалоговое окно **СТЮДЕНТ.ТЕСТ** за серое поле мышью отодвиньте вправо на 1-2 см от данных (при нажатой левой кнопке). Указателем мыши введите диапазон данных контрольной группы в поле **Массив 1 (A2:A8)**. В поле **Массив 2** введите диапазон данных исследуемой группы (**B2:B8**). В поле **Хвосты** всегда вводится с клавиатуры цифра **2** (без кавычек), а в поле **Тип с клавиатуры** введите цифру **3**. Нажмите кнопку **ОК**. В ячейке **A11** появится значение вероятности – **0,006295** (рис. 2.23).

	А	В	С
1	Реклама	Без рекламы	
2	162	135	
3	156	126	
4	144	115	
5	137	140	
6	125	121	
7	145	112	
8	151	130	
9			
10			
11	0,006295		
12			

Рисунок 2.23. Результат вычислений

3. Поскольку величина вероятности случайного появления анализируемых выборок (**0,006295**) меньше уровня значимости ($\alpha = 0,05$), то нулевая гипотеза отвергается. Следовательно, различия между выборками не случайные и средние выборок считаются достоверно отличающимися друг от друга. Поэтому на основании применения критерия Стьюдента можно сделать вывод о большей эффективности реализации путевок после начала рекламной компании ($p < 0,05$).

Задача 2.9

Сравнивается количество наличных денег у двух групп студентов (в рублях:

Группа 1	Группа 2
30	10
30	20
40	30
50	40
60	50


Необходимо определить достоверность различия между группами при двух вариантах постановки задачи:

- группы состоят из различных студентов (тип 3);
- группы состоят из одних и тех же студентов, но первая - до посещения буфета, а вторая - после (тип 1).

Решение


1. В ячейки **C1:C5** введите количество денег у студентов первой группы.

2. В ячейки **D1:D5** введите количество денег у студентов второй группы.

3. Табличный курсор установите в свободную ячейку (**C6**). На строке формул нажмите кнопку **Вставка функции** (). В появившемся диалоговом окне **Мастер функций** выберите категорию **Статистические** и функцию **СТЮДЕНТ.ТЕСТ**, после чего нажмите кнопку **ОК**. Появившееся диалоговое окно **СТЮДЕНТ.ТЕСТ** за серое поле мышью отодвиньте вправо на 1-2 см от данных (при нажатой левой кнопке). Указателем мыши введите диапазон данных первой группы в поле **Массив 1 (C1:C5)**. В поле **Массив 2** введите диапазон данных второй группы (**D1:D5**). В поле **Хвосты** всегда вводится цифра **2** (без кавычек), а в поле **Тип** введите цифру **3**.

Нажмите кнопку **ОК**. В ячейке **С6** появится значение вероятности - **0,228053**.

Поскольку величина вероятности случайного появления анализируемых выборок (**0,228053**) больше уровня значимости ($\alpha = 0,05$), то нулевая гипотеза не может быть отвергнута (принимается). Следовательно, различия между выборками могут быть случайными и средние выборок не считаются достоверно отличающимися друг от друга. Поэтому на основании применения критерия Стьюдента нельзя сделать вывод о достоверности отличий двух групп студентов по количеству карманных денег, имеющих у них ($p > 0,05$),

4. Табличный курсор установите в свободную ячейку (**D6**). На строке формул нажмите кнопку **Вставка функции** (). В появившемся диалоговом окне **Мастер функций** выберите категорию **Статистические** и функцию **СТЮДЕНТ.ТЕСТ**, после чего нажмите кнопку **ОК**. Появившееся диалоговое окно **СТЮДЕНТ.ТЕСТ** за серое поле мышью отодвиньте вправо на 1-2 см от данных (при нажатой левой кнопке). Указателем мыши введите диапазон данных первой группы в поле **Массив 1 (C1:C5)** и поле **Массив 2** введите диапазон данных второй группы (**D1:D5**). В поле **Хвосты** всегда вводится цифра **2** (без кавычек), а в поле **Тип** введите цифру **1**. Нажмите кнопку **ОК**. В ячейке **D6** появится значение вероятности - **0,003383** (рис. 24).

Поскольку величина вероятности случайного появления анализируемых выборок (**0,003383**) меньше уровня значимости ($\alpha = 0,05$), то нулевая гипотеза отвергается.

	A	B	C	D	E
1			30	10	
2			30	20	
3			40	30	
4			50	40	
5			60	50	
6			0,228053	0,003883	
7					

Рисунок 2.24 Результат вычислений

Следовательно, различия между выборками не могут быть случайными и средние выборок считаются достоверно отличающимися друг от друга. Поэтому на основании применения критерия Стьюдента можно сделать вывод о том, что в двух группах студентов выявлены достоверные отличия по количеству карманных денег ($p < 0,05$), что явилось результатом посещения буфета.

Таким образом, ясно, что применение различных типов критерия Стьюдента может приводить к различным результатам на основании одних и тех же исходных данных. Можно предложить следующий приблизительный способ выбора типа критерия: если не ясно, какой тип критерия выбирать, выбирается **тип 3**; если очевидно, что выборки зависимы, связаны (например, это одни и те же студенты), то следует выбирать **тип 1**.

Задача 2.10

Пусть после окончания двух университетов экономического профиля трудоустроилось по специальности из первого университета 90 человек, а из второго - 60 (обе группы молодых специалистов включали по 100 человек). Определите, достоверны ли отличия по успешности трудоустройства.

Решение

1. Принимается нулевая гипотеза, что выборки принадлежат к одной генеральной совокупности.

2. Определяется ожидаемое значение результата (среднее значение между выборками): $(60 + 90)/2 = 75$, то есть мы ожидали, что разницы между группами нет, и в обоих случаях должно было трудоустроиться по **75** человек.

3. Затем вычисляется значение вероятности того, что изучаемые события (трудоустройство в обеих выборках) произошли случайным образом. Для этого введите данные в рабочую таблицу: **90** - в ячейку **E1**, **60** - в **F1**, **75** - в **E2** и **F2**. Табличный курсор установите в свободную ячейку (**E3**). На строке формул нажмите кнопку **Вставка функции** (f_x). В появившемся диалоговом окне **Мастер функций** выберите категорию **Статистические** и функцию **ХИ2.ТЕСТ**, после чего нажмите кнопку **ОК**. Появившееся диалоговое окно **ХИ2.ТЕСТ** за серое поле мышью отодвиньте вправо на 1-2 см от данных (при нажатой левой кнопке). Указателем мыши введите диапазон данных наблюдавшегося количества трудоустроившихся в поле **Фактический интервал (E1:F1)**. В поле **Ожидаемый интервал** введите диапазон данных предполагаемого количества трудоустроившихся (**E2:F2**). Нажмите кнопку **ОК**. В ячейке **E3** появится значение вероятности - **0,014306** (рис. 2.25).

4. Поскольку величина вероятности случайного появления анализируемых выборок (**0,0143**) меньше уровня значимости ($\alpha = 0,05$), то нулевая гипотеза отвергается. Следовательно, различия между выборками не могут быть случайными и выборки считаются достоверно отличающимися друг от друга. Поэтому на основании применения критерия хи-квадрат можно сделать вывод о том, что в двух группах выпускников выявлены достоверные отличия по успешности трудоустройства ($p < 0,05$), что, по-видимому, явилось результатом более высокой репутации выпускников первого университета.

E3		fx =ХИ2.ТЕСТ(E1:F1;E2:F2)					
	A	B	C	D	E	F	G
1					90	60	
2					75	75	
3					0,014306		
4							

Рисунок 2.25 Результат вычислений

Упражнения

1. Даны результаты бега на дистанции 100 м в секундах в двух группах студенток. Студенты первой группы в течение года посещали факультативные занятия по физкультуре. Определите, достоверны ли отличия по результатам бега в этих группах.

Посещавшие факультатив	Не посещавшие
12,6	12,8
12,3	13,2
11,9	13,0
12,2	12,9
13,0	13,5
12,4	13,1

2. В ходе социологического опроса на вопрос о перенесенном в детстве заболевании ответы распределились следующим образом:

	Да	Нет	Не помню
Мужчины	58	11	10
Женщины	35	25	23

Есть ли достоверные отличия в ответах женщин и мужчин?

3. Приведены данные ежемесячной результативности (количество голов) футбольной команды в двух сезонах:

Месяц	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2017 г.	3	4	5	8	9	1	2	4	5
2018 г.	6	19	3	2	14	4	5	17	1

4. Определите, есть ли статистические различия в ежемесячной результативности команды в рассматриваемых сезонах?

5. Определите, имеют ли выборки {6; 7; 9; 15; 21} и {20; 28; 31; 38; 40} различные уровни разнородности (отличаются ли дисперсии)?

2.6 Использование инструмента

Пакета анализа для выявления различий между выборками

Для анализа двух выборок с помощью t-теста Стьюдента могут быть использованы следующие процедуры: Парный двухвыборочный t-тест для средних; Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями и Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями. В общем случае необходимо воспользоваться процедурой Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями, так как процедуры Парный двухвыборочный t-тест для средних и Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями относятся к частным, специальным случаям.

Задача 2.11

Рассматривается заработная плата обслуживающего персонала и работников ресторана.

Администрация	Персонал	Ресторан
4500	2100	3200
4000	2100	3000
3700	2000	2500
3000	2000	2000
2500	1900	1900
	1800	1800
	1800	

Можно ли по этим данным сделать вывод о большей зарплате работников ресторана?

Решение

Для решения задач такого типа используются так называемые критерии различия, в частности, t-критерий Стьюдента.

1. Введите данные: для персонала - в диапазон **A1:A3**; работников ресторана - в диапазон **B1:B6**.

2. Выбор процедуры осуществляется из трех вариантов t-теста. Поскольку данные не имеют попарного соответствия, число их различно и говорить о равенстве дисперсий затруднительно, то выберите процедуру **Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями**.

Для реализации процедуры в пункте меню **Данные** выберите кнопку **Анализ данных** и далее укажите курсором мыши на строку **Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями** (рис. 2.26).

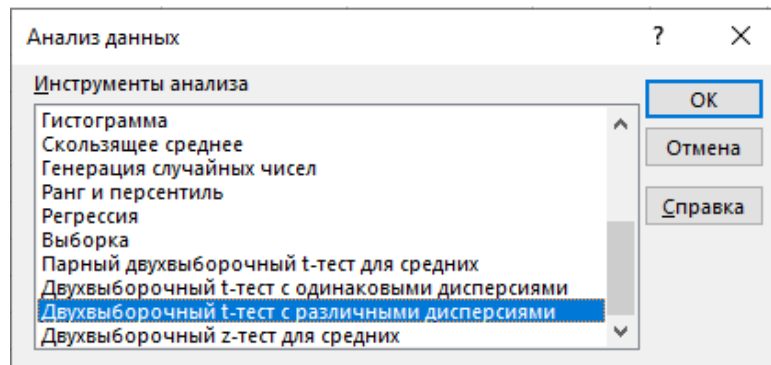


Рисунок 2.26 Диалоговое окно для выбора «Анализ данных»

3. В появившемся диалоговом окне задайте **Интервал переменной 1**. Для этого наведите указатель мыши на верхнюю ячейку столбца (**A1**), нажмите левую кнопку мыши и, не отпуская ее, протяните указатель мыши к нижней ячейке (**A3**), затем отпустите левую кнопку мыши.

4. Аналогично укажите **Интервал переменной 2**, то есть введите ссылку на диапазон второго столбца **B1:B6**.

5. Далее укажите выходной диапазон. Для этого поставьте переключатель в положение **Выходной диапазон** (наведите указатель мыши и щелкните левой кнопкой), затем наведите указатель мыши на правое поле ввода **Выходной диапазон** и, щелкнув левой кнопкой мыши, указатель мыши наведите на левую верхнюю ячейку выходного диапазона (**C1**). Щелкните левой кнопкой мыши и нажмите кнопку **ОК** (рис. 2.27).

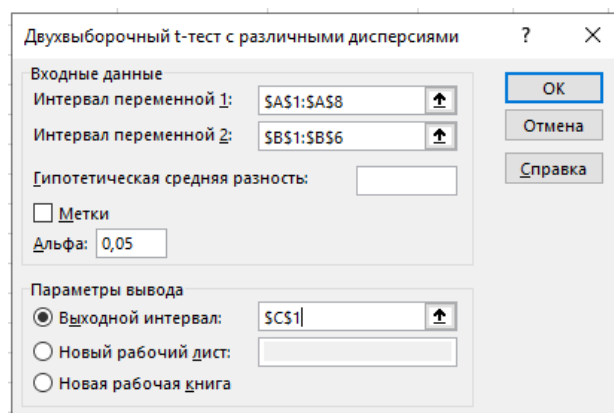


Рисунок 2.27 Заполненное диалоговое окно инструмента «Двухвыборочный F-тест с различными дисперсиями»

Результаты анализа. В выходном диапазоне **C1:E13** появятся результаты процедуры **Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями** (рис. 2.28).

	A	B	C	D	E
1	2100	3200	Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями		
2	2100	3000			
3	2000	2500		<i>Переменная 1</i>	<i>Переменная 2</i>
4	2000	2000	Среднее	1962,5	2400
5	2000	1900	Дисперсия	14107,14286	356000
6	1900	1800	Наблюдения	8	6
7	1800		Гипотетическая разность средних	0	
8	1800		df	5	
9			t-статистика	-1,769982969	
10			P(T<=t) одностороннее	0,068475306	
11			t критическое одностороннее	2,015048373	
12			P(T<=t) двухстороннее	0,136950611	
13			t критическое двухстороннее	2,570581836	
14					

Рисунок 2.28 Исходные данные и результата анализа

Интерпретация результатов. Средние значения заработной платы (**1962** для персонала и **2400** для работников ресторана) довольно сильно отличаются. Тем не менее, нулевая гипотеза о том, что разницы между группами нет (то есть средние выборок равны между собой), отвергнута быть не может. Это следует из того, что вероятность реализации нулевой гипотезы достаточно велика (**p=0,1389**, что больше чем уровень значимости **0,05**, то есть **p>0,05**) и величина вероятности случайного появления анализируемых выборок (**P(T<=t)** двухстороннее) больше уровня значимости (**α = 0,05**). А это позволяет говорить, что различия между выборками могут быть случайными, то есть различия недостоверные.

Таким образом, из полученных результатов исследования вытекает, что на основании приведенных данных нельзя сделать вывод о достоверно большей зарплате работников ресторана.

Упражнения

1. Определите, достоверны ли различия в количестве приобретаемых туристских путевок семейными парами и отдельными туристами

	Количество приобретаемых путевок					
Месяцы	1	2	3	4	5	6
Пары	67	75	58	89	96	94
Одиночки	43	56	78	87	85	90

2. В таблице приведены результаты группы студентов по скоростному чтению до и после специального курса по быстрому чтению. Произошли ли статистически значимые изменения скорости чтения у студентов?

Студент	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
До курса	86	83	86	70	66	90	70	85	77	86
После	82	79	91	77	68	86	81	90	85	94

2.7 Дисперсионный анализ

В случае необходимости оценить достоверность различия между несколькими группами наблюдений (выборками) используют методы дисперсионного анализа.

Дисперсионный анализ предназначен для исследования задачи о действии на измеряемую случайную величину (отклик) одного или нескольких независимых факторов, имеющих несколько градаций. Причем в однофакторном, двухфакторном и т.д. анализе влияющие на результат факторы считаются известными, и речь идет только о выяснении существенности или оценке этого влияния.

Применение дисперсионного анализа возможно, если можно предполагать соответствие выборочных групп генеральным совокупностям с нормальным распределением и независимость распределений наблюдений в группах.

Задача 2.12

Необходимо выявить, влияет ли расстояние от центра города на степень заполняемости гостиниц. Пусть введены 3 уровня расстояний от центра города: 1) до 3 км, 2) от 3 до 5 км и 3) свыше 5 км. Данные заполняемости представлены в таблице.

Расстояние	Заполняемость, %					
до 3 км	92	98	89	97	90	94
от 3 до 5 км	90	86	84	91	83	82
свыше 5 км	87	79	74	85	73	77

Решение

1. Исследуемые данные введите в рабочую таблицу Excel по столбцам: в столбец **A** - заполняемость гостиниц в центре города, в столбец **B** - гостиниц, находящихся на расстоянии от 3 до 5 км и т. д. (диапазон **A1:C6**).

2. Выполните команду **Данные - Анализ данных**. В появившемся диалоговом окне **Анализ данных** в списке выберите процедуру **Однофакторный дисперсионный анализ**. Нажмите кнопку **ОК**.

3. В появившемся диалоговом окне **Однофакторный дисперсионный анализ** в поле **Входной интервал** задайте **A1:C6**. Для этого наведите указатель мыши на ячейку **A1** и протяните его к ячейке **C6** при нажатой левой кнопке мыши.

4. В разделе **Группировка** переключатель установите в положение **по столбцам**.

5. Далее необходимо указать **Выходной диапазон**. Для этого поставьте переключатель в положение **Выходной интервал** (наведите указатель мыши и щелкните левой кнопкой), затем щелкните указателем мыши в правом поле ввода **Выходной интервал**, и щелчком мыши на ячейке **A8** укажите расположение выходного диапазона (рис. 2.29), Нажмите кнопку **ОК**.

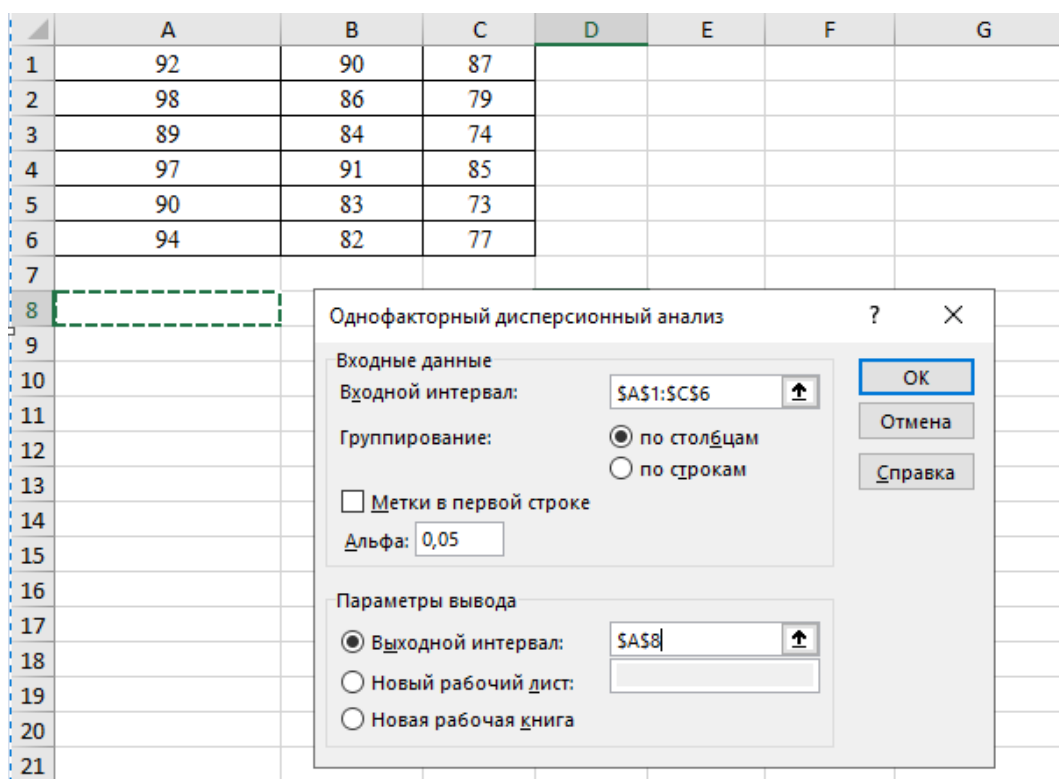


Рисунок 2.29. Заполненное диалоговое окно инструмента «Однофакторный дисперсионный анализ»

Результаты анализа. В результате будет получена таблица, показанная на рис. 3.30.

	A	B	C	D	E	F	G
8	Однофакторный дисперсионный анализ						
9							
10	ИТОГИ						
11	<i>Группы</i>	<i>Счет</i>	<i>Сумма</i>	<i>Среднее</i>	<i>Дисперсия</i>		
12	Столбец 1	6	560	93,33333	13,46667		
13	Столбец 2	6	516	86	14		
14	Столбец 3	6	475	79,16667	32,96667		
15							
16							
17	Дисперсионный анализ						
18	<i>Источник вариации</i>	<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>P-Значение</i>	<i>F критическое</i>
19	Между группами	602,333333	2	301,1667	14,95036	0,0002684	3,682320344
20	Внутри групп	302,166667	15	20,14444			
21							
22	Итого	904,5	17				
23							

Рисунок 3.30 Результат работы инструмента «Однофакторный дисперсионный анализ»

Интерпретация результатов. В таблице **Дисперсионный анализ** на пересечении строки **Между группами** и столбца

P-Значение находится величина **0,0002684**. Величина **P-Значение** **< 0,05**, следовательно, критерий Фишера значим и влияние фактора расстояния от центра города на эффективность заполнения гостиниц доказано статистически.

Упражнение

1. Определите, влияет ли фактор образования на уровень зарплаты в гостинице на основании следующих данных:

Образование	Зарплата сотрудника					
	высшее	3200	3000	2600	2000	1900
среднее спец.	2600	2000	2000	19000	18000	17000
среднее	2000	2000	1900	1800	1700	1700

2.8 Корреляционный анализ

Важным разделом статистического анализа является корреляционный анализ, служащий для выявления взаимосвязей между выборками.

Коэффициент корреляции (R, r) - параметр, характеризующий степень линейной взаимосвязи между двумя выборками. Коэффициент корреляции изменяется от -1 (строгая обратная линейная зависимость) до 1 (строгая прямая пропорциональная зависимость). При значении 0 линейной зависимости между двумя выборками нет. Здесь под прямой зависимостью понимают зависимость, при которой увеличение или уменьшение значения одного признака ведет, соответственно, к увеличению или уменьшению второго.

При большом числе наблюдений, когда коэффициенты корреляции необходимо последовательно вычислять из нескольких рядов числовых данных, для удобства получаемые коэффициенты сводят в таблицы, называемые корреляционными матрицами.

Корреляционная матрица - это квадратная (или прямоугольная) таблица, в которой на пересечении соответствующих строки и

столбца находится коэффициент корреляции между соответствующими параметрами.


Задача 2.13

Имеются результаты семимесячных наблюдений реализации путевок двух туристских маршрутов тура А и тура В.

Тур А	Тур В
120	20
121	15
105	18
92	16
113	19
90	16
80	15

Необходимо определить, имеется ли взаимосвязь между количеством продаж путевок обоих маршрутов.

Решение

Для выявления степени взаимосвязи прежде всего необходимо ввести данные в рабочую таблицу. Откройте новую рабочую таблицу. Введите в ячейку **A1** слова **Тур А**, затем в ячейки **A2:A8** - соответствующие значения числа продаж. В ячейки **B1:B8** введите название и значения для тура **В**. Затем вычисляется значение коэффициента корреляции между выборками. Для этого табличный курсор установите в свободную ячейку (**A3**). На строке формул нажмите кнопку **Вставка функции** (). В появившемся диалоговом окне **Мастер функций** выберите категорию **Статистические** и функцию **КОРРЕЛ**, после чего нажмите кнопку **ОК**. Появившееся диалоговое окно **КОРРЕЛ** за серое поле мышью отодвиньте вправо на 1-2 см от данных (при нажатой левой клавише). Указателем мыши введите диапазон данных **Тур А** в поле **Массив 1 (A2:A8)**. В поле **Массив 2** введите диапазон данных **Тур В (B2:B8)**. Нажмите кнопку

ОК. В ячейке **A9** появится значение коэффициента корреляции - **0,557291667**. Значит, можно говорить о том, что в течение периода наблюдения имелась степень прямой линейной взаимосвязи между количествами проданных путевок обоих маршрутов (**r=0,557292**) (рис. 2.31).

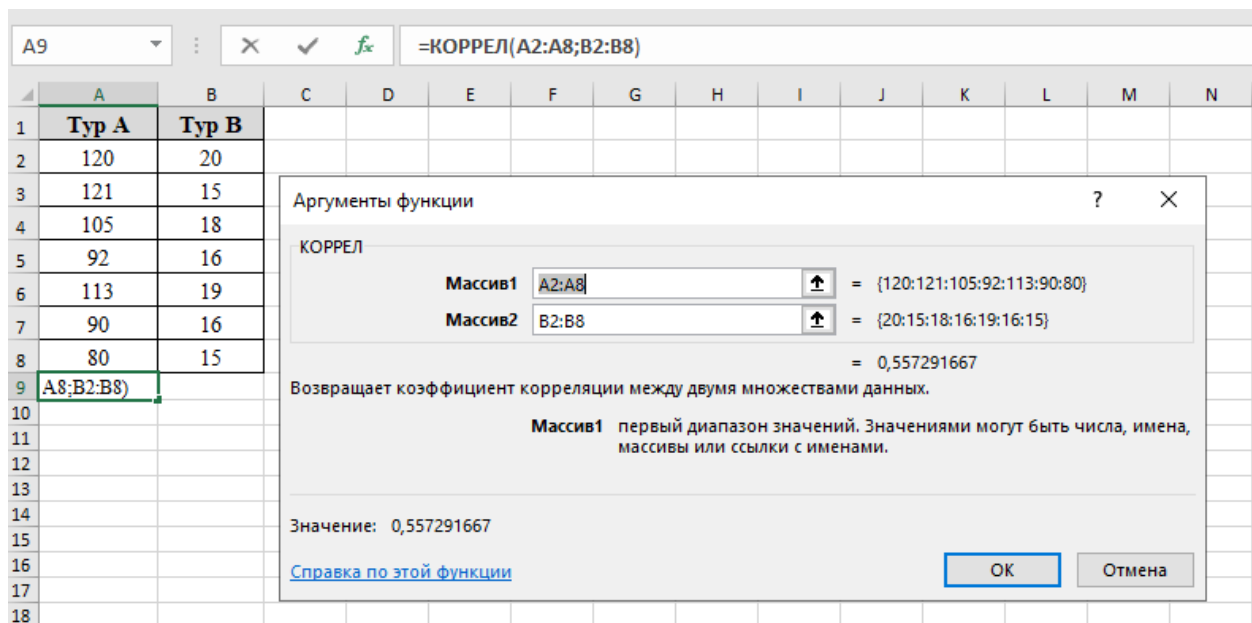


Рисунок 2.31 Заполненное диалоговое окно функции «КОРРЕЛ»

Задача 2.14

Имеются ежемесячные данные наблюдений за состоянием погоды и посещаемостью музеев и парков.

Число ясных дней	Количество посетителей музея	Количество посетителей парка
8	495	132
14	503	348
20	380	643
25	305	865
20	348	743
15	465	541

Необходимо определить, существует ли взаимосвязь между состоянием погоды и посещаемостью музеев и парков.

Решение

Для выполнения корреляционного анализа введите в диапазон **A1:G3** исходные данные (рис. 2.32).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ясные дни	8	14	20	25	20	15
2	Посещаемость музея	495	503	380	305	348	465
3	Посещаемость парка	132	348	643	865	743	541

Рисунок 2.32 Исходные данные для решения задачи

Затем в меню **Данные** выберите пункт **Анализ данных** и далее укажите строку **Корреляция**. В появившемся диалоговом окне укажите **Входной интервал B1:C3**. Укажите, что данные рассматриваются **по строкам**. Укажите **Выходной диапазон**. Для этого поставьте флажок на левое поле **Выходной интервал** и в правое поле ввода **Выходной интервал** введите **A4** (рис. 2.33). Нажмите кнопку **ОК**.

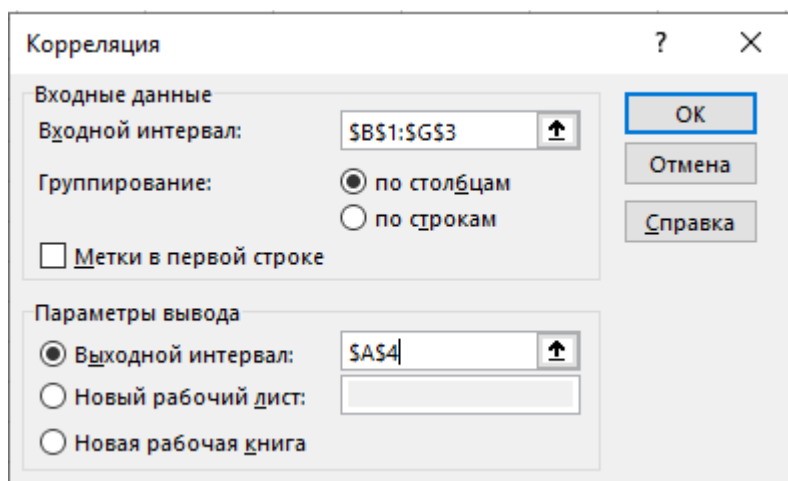


Рисунок 2.33 Заполненное диалоговое окно инструмента «Корреляция»

Результаты анализа. В выходном диапазоне получаем корреляционную матрицу (рис. 2.34).

	A	B	C	D
4	<i>Строка 1 Строка 2 Строка 3</i>			
5	Строка 1	1		
6	Строка 2	-0,92185	1	
7	Строка 3	0,974576	-0,91938	1
8				

Рисунок 2.34 Результаты вычисления корреляционной матрицы

Интерпретация результатов. Из таблицы видно, что корреляция между состоянием погоды и посещаемостью музея равна - **0,92**, а между состоянием погоды и посещаемостью парка - **0,97**, между посещаемостью парка и музея **r=-0,92**.

Таким образом, в результате анализа выявлены зависимости: сильная степень обратной линейной взаимосвязи между посещаемостью музея и количеством солнечных дней (**r=-0,92**) и практически линейная (очень сильная прямая) связь между посещаемостью парка и состоянием погоды (**r=0,97**). Между посещаемостью музея и парка имеется сильная обратная взаимосвязь (**r= -0,92**).

Подразумевается, что в пустых клетках в правой верхней половине таблицы находятся те же коэффициенты корреляции, что и в нижней левой (симметрично расположенные относительно диагонали).

Упражнения

1. Определите, имеется ли взаимосвязь между рождаемостью и смертностью (количество на 1000 человек):

Годы	Рождаемость	Смертность
2013	9,3	12,5
2014	7,4	13,5
2015	6,6	17,4
2016	7,1	17,2
2017	7,0	15,9
2018	6,6	14,2

2. Определите, имеется ли взаимосвязь между годовым уровнем инфляции (%) ставкой рефинансирования (%) и курсом доллара (руб./\$), по следующим данным ежегодных наблюдений:

Уровень инфляции	Ставка рефинансирования	Курс \$
84	85	6,3
45	55	14
56	65	20
34	40	28
23	28	29

2.9 Регрессионный анализ

При исследовании взаимосвязей между выборками помимо корреляции различают также и регрессию. Регрессия используется для анализа воздействия на отдельную зависимую переменную значений одной или более независимых переменных. Соответственно, наряду с корреляционным анализом еще одним инструментом изучения стохастических зависимостей является регрессионный анализ.

Регрессионный анализ устанавливает формы зависимости

между случайной величиной Y (зависимой) и значениями одной или нескольких переменных величин (независимых), причем значения последних считаются точно заданными. Такая зависимость обычно определяется некоторой математической моделью (уравнением регрессии), содержащей несколько неизвестных параметров. В ходе регрессионного анализа на основании выборочных данных находят оценки этих параметров, определяются статистические ошибки оценок или границы доверительных интервалов и проверяется соответствие (адекватность) принятой математической модели экспериментальным данным.

Задача 2.15

В отделе снабжения гостиницы имеется информация об изменении стоимости стирального порошка за длительный период времени. Сопоставляя его с изменениями курса доллара на этот же период времени, можно построить регрессионное уравнение. Ниже приведены стоимость пачки стирального порошка (в руб.) и соответствующий курс доллара (руб./USD).

№	Порошок	Курс
1	5	6,3
2	7	9
3	9	12
4	12	15
5	15	19
6	16	21
7	20	25
8	25	29,3

Необходимо на основании этих данных построить регрессионное уравнение, позволяющее по курсу доллара определять предполагаемую стоимость пачки стирального порошка.

Решение

1. Введите данные в рабочую таблицу: стоимость пачки порошка - в диапазон **A1:A8**; курс доллара в диапазон **B1:B3** (заметим, что знак запятой, отделяющей целую часть от дробной, соответствует «запятая»).

2. В меню **Данные** выберите строку **Анализ данных** и далее укажите курсором мыши на строку **Регрессия**.

3. В появившемся диалоговом окне (рис. 2.35) задайте **Входной интервал Y**. Для этого наведите указатель мыши на верхнюю ячейку столбца зависимых данных (**A1**), нажмите левую кнопку мыши и, не отпуская ее, протяните указатель мыши к нижней ячейке (**A8**), затем отпустите левую кнопку мыши. (Обратите внимание, что зависимые данные - это те данные, которые предполагается вычислять).

4. Так же укажите **Входной интервал**, то есть введите ссылку на диапазон независимых данных **B1:B8**. (Независимые данные - это те данные, которые будут измеряться или наблюдаться).

5. Установите флажок в поле **График подбора**.

6. Далее укажите выходной диапазон. Для этого поставьте переключатель в положение **Выходной интервал** (наведите указатель мыши и щелкните левой кнопкой), затем наведите указатель мыши на правое поле ввода **Выходной интервал** и, щелкнув левой кнопкой мыши, указатель мыши наведите на левую верхнюю ячейку выходного диапазона (**C1**). Щелкните левой кнопкой мыши (рис. 2.35). Нажмите кнопку **ОК**.

7. **Результаты анализа.** В выходном диапазоне появятся следующие результаты и график подбора (рис. 2.36).

8. **Интерпретация результатов.** В таблице **Дисперсионный анализ** оценивается общее качество полученной модели: ее достоверность по уровню значимости критерия Фишера - p , который должен быть меньше, чем **0,05** (строка **Регрессия**, столбец **Значимость F**, в задаче - **1,58E-07 (0,000000158)**, то есть $p=0,000000158$ и модель значима) к степени точности описания

моделью процесса - **R-квадрат** (вторая строка сверху в таблице Регрессионная статистика, в примере **R-квадрат=0,932**). Поскольку **R-квадрат > 0,95**, можно говорить о высокой точности аппроксимации.

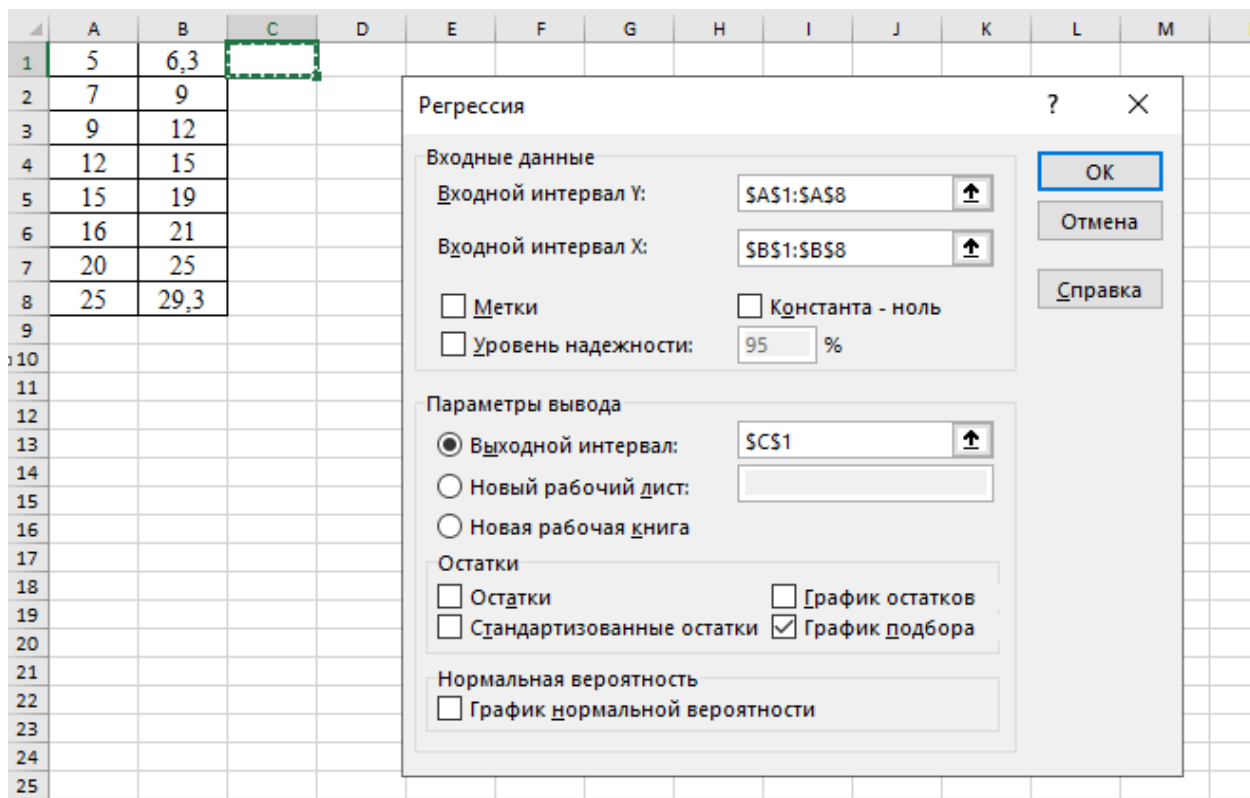


Рисунок 2.35 Заполненное диалоговое окно инструмента «Регрессия»

Далее необходимо определить значения коэффициентов модели. Они определяются из таблицы в столбце **Коэффициенты** - в строке **Y-пересечение** приводится свободный член; в строках соответствующих переменных приводятся значения коэффициентов при этих переменных. В столбце **p-значение** приводится достоверность отличия соответствующих коэффициентов от нуля. В случаях, когда **p>0,05** коэффициент может считаться нулевым. Это означает, что соответствующая независимая переменная практически не влияет на зависимую переменную и коэффициент может быть убран из уравнения.

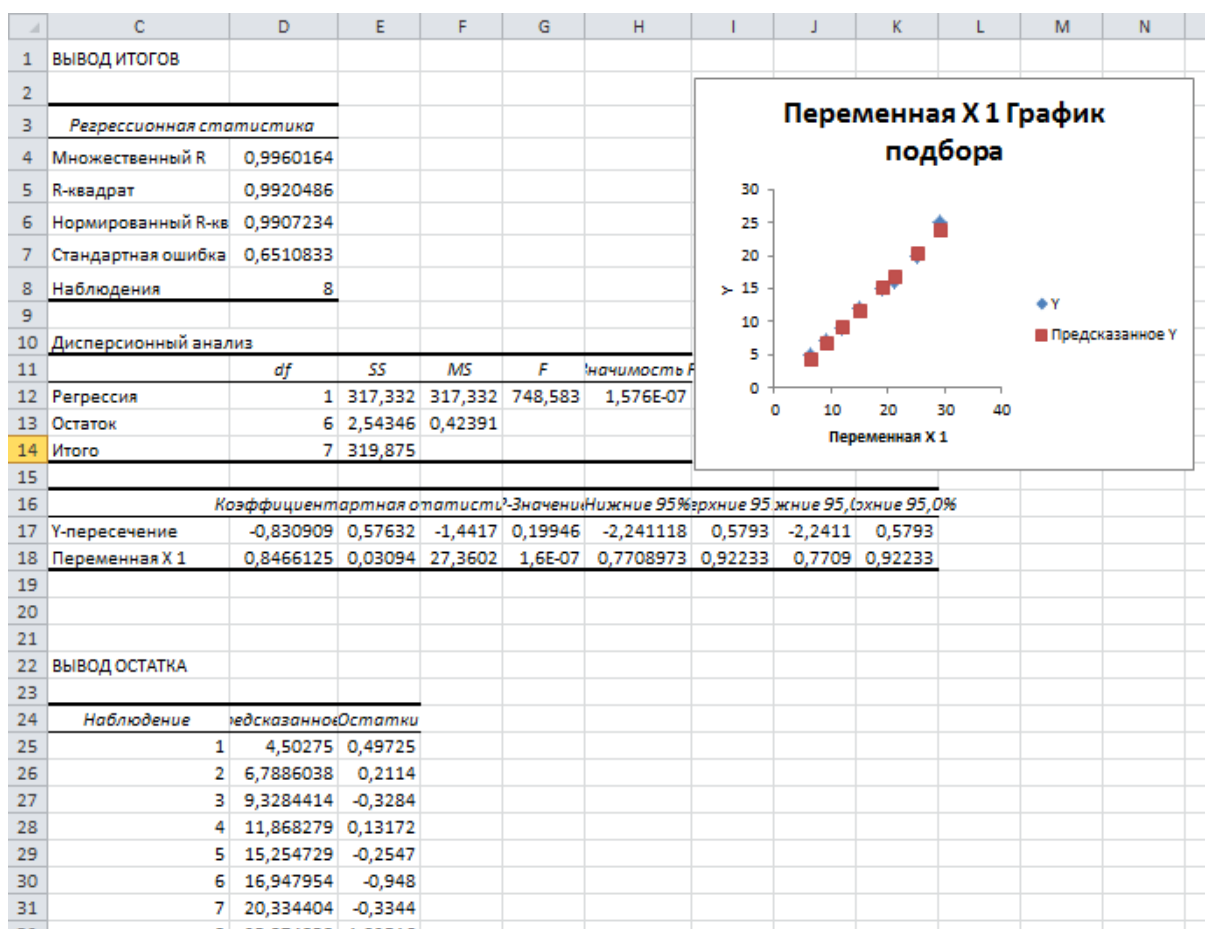


Рисунок 2.36 Результаты анализа и график соответствия экспериментальных точек и предсказанных по регрессионной модели

Отсюда выражение для определения стоимости пачки порошка в рублях будет иметь следующий вид; **-0,83+0,847*(Курс доллара, руб./USD).**

Полученная модель с высокой точностью позволяет определять, что стоимость стирального порошка (**R²=99,2%**).

Упражнение

1. Постройте зависимость зарплаты (\$) от возраста сотрудника гостиницы по следующим данным:

Возраст	Зарплата
20	800
50	2500
45	2500
40	2000
25	1200
30	1800

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башмакова, Е.И. Информатика и информационные технологии. Умный Excel 2016: библиотека функций [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Башмакова. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2020. - 109 с. - ЭБС «IPRbooks». - Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/94205.html>
2. Безручко, В.Т. Компьютерный практикум по курсу «Информатика» [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.Т. Безручко. - Москва: ФОРУМ; ИНФРА-М, 2019. - 368 с. - ЭБС «Znanium.com». - Режим доступа: <https://znanium.com/catalog/product/1009442>
3. Гусаров, В.М. Статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / В.М. Гусаров, Е.И. Кузнецова. - Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2017. - 479 с. - ЭБС «IPRbooks». - Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/71166.html>
4. Демина, Т.И. Математика и основы медицинской статистики [Электронный ресурс]: учебное пособие / Демина Т.И., Чуюко Е.Б. - Майкоп: МГТУ, 2020. - 158 с. - Режим доступа: <http://lib.mkgtu.ru:8002/libdata.php?id=2100052105>
5. Демина, Т.И. Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие для студентов направления 080100.63 «Экономика» / Т.И. Демина, О.П. Шевякова. - Майкоп: Магарин О.Г., 2013. - 48 с. - Режим доступа: <http://lib.mkgtu.ru:8002/libdata.php?id=2000029442>
6. Лысенко, С.Н. Общая теория статистики [Электронный ресурс]: учебное пособие / С.Н. Лысенко, И.А. Дмитриева. - М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2018. - 219 с. - ЭБС «Znanium.com». - Режим доступа: <https://znanium.com/catalog/product/967136>
7. Калабухова, Г.В. Компьютерный практикум по информатике. Офисные технологии [Электронный ресурс]: учебное пособие / Г.В. Калабухова, В.М. Титов. - М.: ФОРУМ: Инфра-М, 2020. - 336 с. - ЭБС «Znanium.com». - Режим доступа: <https://znanium.com/catalog/product/1047102>
8. Козлов, А.Ю. Статистический анализ данных в MS Excel [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.Ю. Козлов, В.С. Мхитарян,

В.Ф. Шишов. - Москва: ИНФРА-М, 2019. - 320 с. - ЭБС «Znanium.com».
- Режим доступа: <https://znanium.com/catalog/product/987337>

9. Мокрова, Н.В. Табличный процессор Microsoft Office Excel [Электронный ресурс]: практикум / Н.В. Мокрова. - Саратов: Вузовское образование, 2018. - 41 с. - ЭБС «IPRbooks». - Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/77153.html>

10. Курс высшей математики. В 2 ч. Ч. 1 [Электронный ресурс]: учебник / М.К. Беданокоев [и др.]. - Майкоп: Магарин О.Г., 2013. - 384 с. - Режим доступа: <http://lib.mkgtu.ru:8002/libdata.php?id=2000047917>

11. Курс высшей математики. В 2 ч. Ч. 2 [Электронный ресурс]: учебник / М.К. Беданокоев [и др.]. - Майкоп: Магарин О.Г., 2013. - 279 с. - Режим доступа: <http://lib.mkgtu.ru:8002/libdata.php?id=2000047918>

12. Основы работы в Microsoft Excel [Электронный ресурс]: лабораторный практикум / [сост.: А.А. Паскова, Р.П. Бутко]. - Майкоп: Магарин О.Г., 2014.- 68 с. - Режим доступа: <http://lib.mkgtu.ru:8002/libdata.php?id=1000043188>

13. Паскова, А.А. Информатика и информационные технологии [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.А. Паскова, Р.П. Бутко. - Майкоп: Магарин О.Г., 2017. - 180 с. - Режим доступа: <http://lib.mkgtu.ru:8002/libdata.php?id=2100032692>

14. Рудикова Л.В. Microsoft Excel для студента: учебное пособие. – Спб.: БХВ – Петербург, 2016.

15. Сборник задач по статистике [Электронный ресурс]: методическое пособие / составители Хагурова М.П., Меретукова С.К. - Майкоп: Коблева М.Х., 2019. - 76 с. - Режим доступа: <http://lib.mkgtu.ru:8002/libdata.php?id=2100047765>

16. Статистика [Электронный ресурс]: учебник / В.В. Глинский, В.Г. Ионин, Л.К. Серга [и др.]; под ред. В.Г. Ионина. - Москва: ИНФРА-М, 2018. - 355 с. - ЭБС «Znanium.com». - Режим доступа: <https://znanium.com/catalog/product/941774>

Учебное издание

ИНФОРМАТИКА:
математические и статистические задачи
средствами Microsoft Excel

Учебное пособие

Составители

МЕРЕТУКОВА Сусана Касеевна
ЧУНДЫШКО Вячеслав Юрьевич
МЕРЕТУКОВ Шумаф Туркубиевич

Подписано в печать 01.06.2021 г. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Формат 60 x 84 ¹/₁₆.
Печать цифровая. Усл. п. л. 7,46. Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 100. Заказ № 041.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ИП Магарин О.Г.
385008, г. Майкоп, ул. 12 Марта, 146. Тел. 8-906-438-28-07. E-mail: olemag@yandex.ru